附件 1-4

河南省本科高等教育教学成果等级评定
附件材料

（请以此页为封面，将附件单独装订成册）

成 果 名 称 基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究

第一完成单位 河南开封科技传媒学院

推 荐 序 号 0706

附件目录：

第一部分 《教学成果总结报告》

基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究的教学成果总结报告

一、成果的基础与背景

（一）成果的研究背景

大学数学课程是理工、经管类专业学生知识体系的核心基石，承担着传授数学知识与培养逻辑思维、创新能力的双重使命。然而，长期教学实践表明，传统模式在培养学生高阶思维能力方面存在四大突出问题。

其一，灌输式教学主导课堂，思维训练不足。“教师讲、学生听”的单向传递模式过度强调结论推导与技巧演练，弱化了数学概念的思想起源与内在逻辑结构。学生虽能掌握一定操作技能，但面对复杂问题时往往缺乏灵活调用知识、提出独立见解和开展系统性推理的能力。

其二，研究性教学难以有效落地。一方面，不少实践仅停留在“做课题”层面，与主干知识体系脱节；另一方面，缺乏将数学学科的结构性、逻辑性特质与研究性学习有机融合的可操作路径与方法论指导，教学改革难以持续深化。

其三，学生“知其然而不知其所以然”的问题突出。教学中“讲理”不足，学生对知识的理解停留于表层，难以把握知识背后的思想方法与逻辑关联，学习过程被动、枯燥，数学核心素养的培养收效有限。

其四，评价方式重结果轻过程。传统期末考试难以衡量学生的思维发展水平，缺乏对结构分析能力、探究过程的科学评价，无法有效反哺教学改进。

上述困境表明，探索一条契合数学学科特点、能够将研究性学习常态化融入日常教学的新路径，已成为大学数学教学改革的迫切需求。

（二）成果的研究基础

自 2021 年起，项目组开始探索结构分析法在数学教学中的应用，系统梳理其理论内涵，初步提炼出“分析结构、挖掘特点、类比已知、确立思路、形式统一、设计方法”的教学思路，并在部分教学班试点，取得积极反馈。2023 年，项目正式获批河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目（教高〔2023〕388 号，立项序号：180），由崔国忠教授主持，团队成员涵盖《数学分析》《高等数学》《线性代数》等课程的一线骨干教师。围绕结构分析法在研究性教学中的应用，项目组在理论创新、案例开发、教材建设等方面取得多项阶段性成果。项目于 2026 年 1 月经河南省教育厅鉴定结项（教高〔2026〕5 号）。上述研究为本成果的系统构建与推广应用奠定了坚实基础。

二、成果的主要内容

（一）成果内容概述

本成果围绕“结构分析法”这一核心方法论，系统构建了大学数学课程研究性教学模式，形成了“一个核心、两个阶段、三个环节、五大策略”的完整实施路径，最终目标是从“知识灌输”走向“思维育人”。

一个核心：结构分析法。成果将数学学科的结构性、逻辑性特质与研究性教学深度融合，提炼出“分析结构、挖掘特点、类比已知、确立思路、形式统一、设计方法”24 字教学方针，构建了“思路确立+技术路线设计”双阶段问题解决范式。

两个阶段：思路确立与技术路线设计。思路确立阶段解决“用什么定理”的问题——通过分析问题结构、挖掘特点、类比已知定理，确定解题方向；技术路线设计阶段解决“怎么用”的问题——通过形式统一，实现已知与未知的结构转化，设计具体解题方法。

三个环节：课前结构感知—课中结构探究—课后结构迁移。课前通过结构性预习提纲引导学生初步搭建知识框架；课中围绕本原性问题展开阶梯式探究，让学生亲历“再创造”过程；课后通过研究性作业促进知识的迁移与应用。

五大策略：以本原性问题重构教学内容、以结构分析创新课堂教学、以哲学思维渗透教学、以过程能力改革评价机制、以教研协同建设教学资源与团队。五大策略相互支撑、层层递进，共同指向思维育人的根本目标。

（二）成果的核心要素

1.24 字方针的内涵与作用

24 字方针（分析结构、挖掘特点、类比已知、确立思路、形式统一、设计方法）是结构分析法在课堂教学中的具体操作规范。其中，“分析结构”是对问题进行整体把握，识别其构成要素与逻辑关系；“挖掘特点”是发现问题的独特结构特征；“类比已知”是将问题结构与已有知识进行对照，寻找关联；“确立思路”是基于类比结果明确解题方向；“形式统一”是将问题形式转化为已知定理适用的结构；“设计方法”是形成具体的求解步骤。这一方针使隐性的思维过程显性化，为教师设计和学生训练提供了可遵循的思维流程。

2.双阶段范式的具体解释

传统教学往往跳过思路确立阶段，直接给出解法，导致学生只会模仿而不会思考。本成果将问题解决分解为“思路确立”与“技术路线设计”两个阶段，强调“先想后做”。思路确立阶段要求学生回答“为什么用这个定理”——即问题结构与定理条件的匹配依据；技术路线设计阶段要求学生回答“如何实现转化”——即通过形式统一构造出已知结构。两个阶段的划分，使学生从“套公式”转向“设计方法”，从根本上提升了分析问题和解决问题的能力。

3.三段式教学流程的操作要点

课前结构感知：教师发布结构性预习提纲，提出本原性问题，学生自主阅读教材、尝试初步结构分析，记录疑点。课中结构探究：课堂采用“留白+研讨”模式，教师呈现问题后给予学生独立思考时间，随后组织交流，最后由教师点评升华。课后结构迁移：布置研究性作业（如结构分析报告、相似问题设计等），促使学生将课堂习得的

能力迁移到新情境。每章结束后组织“结构复盘”，学生绘制“问题结构—定理匹配”思维导图，形成知识网络。

4.五大策略的协同关系

以本原性问题重构教学内容，还原知识发现的历史情境；以结构分析创新课堂教学，将“讲理”贯穿始终；以哲学思维渗透教学，提升认知高度；以过程能力改革评价机制，实现“评价—反馈—改进”闭环；以教研协同建设教学资源与团队，为模式推广提供保障。五者有机统一，共同指向“思维育人”的根本目标。

三、成果解决的教学问题及方法

（一）成果解决的主要教学问题

本成果聚焦大学数学教学中的四大核心问题。

问题一：如何突破“灌输式”教学，实现从知识传授到思维训练的转变？

传统课堂以教师讲授为主，学生被动接受，过度强调结论推导与技巧演练，弱化了数学概念的思想起源与内在逻辑，导致学生思维僵化、创新能力不足。

问题二：如何在高度抽象的数学课程中有效嵌入研究性学习，避免形式化？

研究性教学常被简单等同于“做课题”，与主干知识体系脱节；同时缺乏将数学的结构性、逻辑性特质与研究性学习融合的可操作路径，改革难以持续深化。

问题三：如何系统培养学生的数学结构分析能力和创新思维？

学生普遍“知其然而不知其所以然”，对知识的理解停留于表层，难以把握知识背后的思想方法与逻辑关联，面对陌生问题时缺乏自主分析与解决的能力。

问题四：如何建立与新模式相匹配的综合性评价体系？

传统期末考试重结果轻过程，难以衡量学生的思维发展水平，缺乏对结构分析能力、探究过程的科学评价，无法有效反哺教学改进。

（二）解决问题的方法

针对上述四大问题，本成果以“结构分析法”为核心，系统采取以下四种解决方法，形成相互支撑的完整路径。

1.以结构分析法重构教学内容与教学过程（对应问题一）

将“定义—定理—例题”的线性逻辑转变为“本原问题—结构分析—方法设计”的探究逻辑。对极限、导数、积分等核心概念进行结构解构，形成“问题—结构—方法”三位一体的教学单元。教学中先呈现本原问题，引导学生自主分析结构、类比已知、确立思路、设计解法，使知识传授与思维训练同步进行，从根本上破解思维僵化难题。

2.以本原性问题为驱动，创设研究性情境（对应问题二）

还原数学概念的历史背景（如瞬时速度、曲边梯形面积），设计“基础层—进阶层—拓展层”三级问题链。基础层引导学生发现数学问题；进阶层帮助建立抽象模型；拓展层迁移到跨领域应用（如SEIR模型）。通过问题链层层递进，让学生在“再创造”中自主发现概念与定理，将研究性学习融入课前、课中、课后全过程，使其成为常态化教学活动，避免形式化。

3.以24字方针为工具，训练思维流程（对应问题三）

将“分析结构、挖掘特点、类比已知、确立思路、形式统一、设计方法”24字教学方针作为思维训练规范。将问题解决分解为“思路确立”（为什么选这个定理）与“技术路线设计”（如何形式统一）两阶段，通过反复训练形成“见结构知方法”的思维惯性。同时辅以典型问题的结构化复盘、思维导图绘制、哲学思维渗透等路径，引导学生从“机械模仿”走向“自主分析”。

4. 以多元评价为导向，构建“过程+能力”并重的考核体系（对应问题四）

构建“过程性评价（40%）+结果性评价（60%）”的综合性考核体系。过程性评价聚焦结构分析发言、思维训练表现和研究性学习成果；结果性评价增设结构分析类开放性题目（如“设计一个与拉格朗日中值定理结构相似的问题”）。通过评价数据诊断教学薄弱环节，实现“评价—反馈—改进”闭环优化。同时，以教研协同为保障，建设 96 个案例库和科研团队，为上述方法的落地提供资源与师资支撑。

以上四种方法系统解决了大学数学教学中的四大核心问题，为研究性教学在数学课程中的常态化落地提供了可操作、可复制的实践路径。

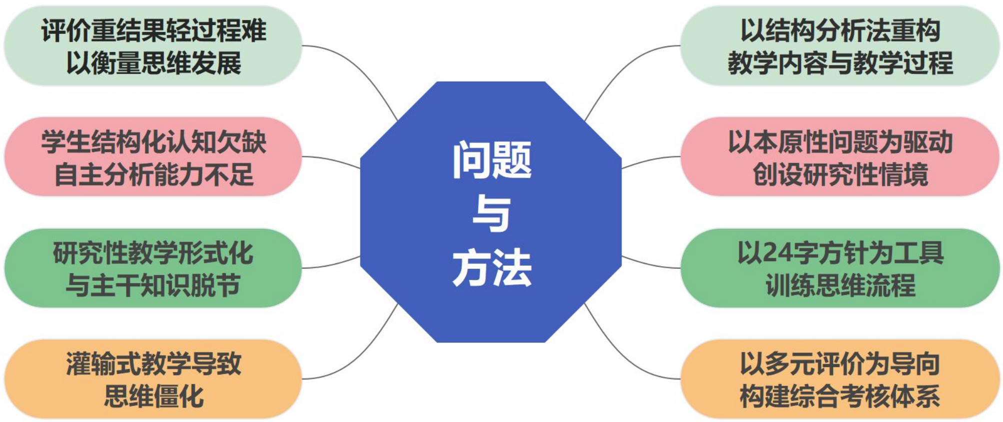


图 1 成果解决的教学问题与方法

四、成果的创新点

（一）理念创新：从“教知识”转向“教思想、教方法”

本成果突破了将研究性教学简单等同于“做课题”的局限，创造性地将“结构分析法”作为核心方法论与研究性教学深度融合，提出“思路确立+技术路线设计”双阶段问题解决范式。这一范式强调：解决任何数学问题都需经历“用什么定理”（思路确立）和“怎么用”（技术路线设计）两个阶段，使隐性思维显性化、可操作化。成果从“教知识”转向“教思想、教方法”，将数学教学的本质定位为思维训练与素养培育，实现了教学理念的根本转变。

（二）方法创新：提炼 24 字教学方针，形成可操作的教学工具

成果提炼出“分析结构、挖掘特点、类比已知、确立思路、形式统一、设计方法”24字教学方针，将波利亚“怎样解题”思想与数学学科特点深度融合。这一方针将问题解决过程系统分解为两个阶段、六个步骤，形成了“结构分析→方法设计”的完整思维链条。教师可依此设计教学，学生可依此训练思维，使原本抽象的研究性教学有了具体、可复用的操作工具，有效解决了研究性教学“难以落地”的难题。

（三）实践创新：开发案例资源库，将哲学思维融入课堂

成果开发了覆盖《数学分析》《高等数学》核心知识的 96 个研究性教学案例，形成“课前结构感知—课中结构探究—课后结构迁移”三段式教学流程，为模式推广提供了坚实的资源保障。同时，将哲学思维系统融入课堂教学，揭示微积分中蕴含的辩证法（如直与曲、有限与无限、局部与整体等），引导学生从哲学高度理解数学理论的矛盾转化机理，提升了教学的思维深度与育人水平。

（四）评价创新：构建“过程+能力”导向的综合性评价体系

成果构建了“过程性评价（40%）+结果性评价（60%）”的综合性考核体系。过程性评价聚焦知识结构分析能力、思维品质训练成效和研究性学习成果三大维度；结果性评价在期末考试中增设结构分析类开放性题目（如“设计一个与拉格朗日中值定理结构相似的问题”），引导学生展示思维过程而非仅呈现答案。这一评价创新实现了从“知识记忆检测”向“思维能力诊断”的转变，形成了“评价—反馈—改进”的良性循环。

五、成果的推广应用效果

本成果经过两年多的系统实践与持续优化，在校内试点应用、校外推广等方面取得了显著成效。

（一）校内应用效果

成果在我校《数学分析》与《高等数学》课程中选取多个教学班进行试点应用，覆盖学生 1000 余人。试点班学生在课堂上的思维活跃度和主动参与度显著高于传统班，期末试卷中结构分析类题目的作答质量明显提升。全国大学生数学竞赛中，试点班学生获奖情况优于非试点班，尤其在需要逻辑推理与结构分析的证明题中表现突出。学生毕业论文中，出现了如《Cauchy 收敛准则的结构分析及其应用》《微分中值定理结构分析与应用》等多篇运用结构分析法的优秀成果。问卷调查显示，绝大多数学生认为“本原性问题让数学不再枯燥”，多数学生表示会主动查找数学在实际中的应用案例。

教师层面：2021 年组建“结构分析科研团队”，顺利通过学校两阶段的科研团队考核，团队成员先后通过《高等数学》或《数学分析》课程的上课达标考核，为教学改革落地提供了坚实的师资保障。团队坚持常态化教研，每周开展集体备课与专题研讨，聚焦教学重点难点，不断优化教学方法，多名教师荣获校级“教学优秀奖”，青年教师在“思维引导”“互动设计”等核心教学指标上取得显著进步。教研成果丰硕，团队累计立项教改课题 20 余项，发表教研论文 5 篇，出版《数学分析中的思想方法》《高等数学教学理论及其研究》两部专著；此外，团队成员张艳敏获评“开封市优秀教师”。

课程建设层面：主持人主编的《数学分析（第二版）》（三册）成功入选河南省“十四五”规划教材，参编的《高等数学》（全二册）由科学出版社正式出版，为课程教学提供了高质量教材支撑；《高等数学》课程获批校级课程思政示范课程，实现知识传授与价值引领的有机融合；同时，建成包含 96 个案例的研究性教学案例库，内容贴合教学实际，成为教师高效备课、学生自主探究学习的重要支撑资源。

（二）校外推广效果

成果在兄弟院校推广应用。商丘学院已连续 3 个学期在 690 名学生中开展应用；安阳学院也已面向 520 名学生开展了应用。各应用单位反馈表明：该模式有效激发了学生参与结构分析讨论的主动性，课堂氛围明显活跃；教师教学理念由知识讲授转向

思维引导，教研积极性显著增强；对大学数学课程教学改革具有重要的实践指导意义和推广价值。

（三）辐射与推广价值

通过教学研讨会、公开课等形式进行成果交流。24 字教学方针和“思路确立+技术路线设计”双阶段范式具有普适性，可类推至《线性代数》《概率论与数理统计》等公共数学课程，也可推广至数学专业的其他专业课程，为破解数学教学中的“思维培养难”问题提供了可操作、可复制的解决方案。受益学生总数已超过 2000 人，形成了良好的示范效应。

第二部分 国家级和省级教学项目、奖励

1. 河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目

2. 河南省教师教育课程改革研究项目

3. 河南省本科高校课程思政样板课程

4. 河南省社会科学界联合会调研课题

5. 河南省民办教育协会课题

6. 河南省高等教育教学改革研究与实践项目

7. 教育部产学合作协同育人项目

8. 河南省高等学校重点科研项目

1.河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究

河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目

鉴定证书

项目名称　基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究

主 持 人　崔国忠

项目成员　栗文辉、裴伟娟、张艳敏、李亚敏、段中雨、刘　康、王丹丹

完成单位　河南开封科技传媒学院

河南省教育厅

二〇二六年一月

文件号：教高〔2023〕388号

2. 河南省教师教育课程改革研究项目：

（1）基于结构分析法的数学专业师范生数学核心素养的培养策略研究

项目名称：基于结构分析法的数学专业师范生数学核心素养的培养策略研究

批 准 号：2024-JSJYYB-120

承担单位：河南开封科技传媒学院

负 责 人：张艳敏

项目参加者：裴伟娟 张玉培 崔国忠 李亚敏 郭焕焕 万红艳 李林琼

经审核，右列项目符合结项条件，准予结项。

证书号：2024-JSJYJX-315

（2）“双导师制”下师范专业课程实践体系构建研究--以数学师范专业为例

河南省教育厅

教师〔2025〕246 号

河 南 省 教 育 厅
关于公布2026年河南省教师教育课程改革研究项目立项名单的通知

各有关高等学校：

根据河南省教育厅办公室《关于做好2025年教师教育课程改革研究项目结项和2026年项目申报工作的通知》（教办师〔2025〕220号）精神，经个人申报、高校推荐、省教育厅组织专家评审、公示等程序，2026年度对河南大学王晋《教育强国战略下职前教师教育家精神培育路径创新研究》等259项教师教育课程改革研究项目予以立项建设。现予公布。

各有关高等学校要按照《河南省教师教育课程改革研究项目管理办法》要求，切实加强教师教育课改项目质量管理、经费管

— 1 —

理和绩效评价，全面加强教师教育学科建设，推动我省教师教育向更高质量迈进。

附件：2026 年河南省教师教育课程改革研究项目立项名单

河南省教育厅

2025 年 12 月 11 日

河南省教育厅办公室　　主动公开　　2025 年 12 月 12 日印发

— 2 —

序号	项目名称	申报单位	主持人	主要参与人	项目类别	项目编号	经费（万元）
202	体育师范生批判性数字素养提升策略与实践路径研究	河南体育学院	李　赫	任玥姗，吴世萌，朱　静，孟欢欢，段居秀，刘肇丹，李维嘉	一般项目	2026-JSJYYB-127	/
203	AI赋能河南省基础教育师资数字素养提升实践研究——依托学校的资源适配与路径创新	郑州工程技术学院	王　彦	李会娟，许　萌，刘亚鹏，周萌萌，马雅楠，郭雪娅，丁雪艳	一般项目	2026-JSJYYB-128	/
204	U-B-S协同视域下特教手语课程“数字赋能·思政融合”改革与实践	郑州工程技术学院	周改丽	陈　洁，杨超然，白瑞霞，赵俊峰，胡梦阳，杭婉萍	一般项目	2026-JSJYYB-129	/
205	河南省小学科学教师跨学科教学能力发展现状、结构模型及提升路径研究	河南开放大学	付宁娴	李　响，高　雯，原晓慧，杨　倩，尼珊瑜，陈晓旭，李　萌	一般项目	2026-JSJYYB-130	/
206	多模态分析视域下精准培训要素赋能教师网络研修学习投入路径研究	河南开放大学	王　玥	赵宜钧，郭怡静，杨　燕，夏颖越，孙　锐	一般项目	2026-JSJYYB-131	/
207	基于创客教育的河南省乡村教师数智素养提升策略及实证研究	河南开放大学	杨　丽	徐智旭，范　颖，杨　燕，王晓飞，王建伟，焦孟霞，刘天梅	一般项目	2026-JSJYYB-132	/
208	BOPPPS教学模式下高校设计资源与中小学美育共享平台协同构建研究	河南开封科技传媒学院	孟　瑶	靳　鸽，袁　静，司　娜，敬丽娟，华　鹏，唐　欣，郭红宇	一般项目	2026-JSJYYB-133	/
209	“双导师制”下师范专业课程实践体系构建研究——以数学师范专业为例	河南开封科技传媒学院	张　丹	栗文辉，李晓萍，刘亚苹，张艳敏，张胜伟，徐鑫峰，黄平均	一般项目	2026-JSJYYB-134	/
210	新课标背景下师范类专业计算思维能力的培养和研究	河南开封科技传媒学院	李莉杰	李　鑫，张燕妮，胡威威，耿晓晓，张　莎，张晓芳，曹志刚	一般项目	2026-JSJYYB-135	/
211	多模态技术赋能音乐师范生教师口语教学的实践路径研究	黄河科技学院	闫　娜	郭军帅，宋晓青，贾新会，武文静，杨　露，甄梦洁，暴　煜	一般项目	2026-JSJYYB-136	/
212	小学教师教育信息化能力提升路径与实践研究	黄河科技学院	周璐璐	高小雪，元　静，石洁滢，潘　燕，梁雅琼	一般项目	2026-JSJYYB-137	/
213	生成式AI赋能师范生个性化教学能力培养的路径研究	商丘工学院	陈文华	李国栋，班明珠，张香丽，彭欠欠，金　杨，张贝贝，邵雪敏	一般项目	2026-JSJYYB-138	/

3. 河南省本科高校课程思政样板课程：概率论与数理统计

河 南 省 教 育 厅

教高〔2021〕432 号

河 南 省 教 育 厅
关于公布河南省 2021 年本科高校课程思政项目建设名单的通知

各本科高校：

按照中共河南省委高校工委、河南省教育厅《关于推进本科高校课程思政建设的指导意见》（教高〔2020〕314 号）和省教育厅《关于开展本科高校第二批课程思政项目建设的通知》（教办高〔2021〕239 号）要求，经高校申报、专家评审、结果公示等环节，认定郑州大学“化工原理”等 200 门课程为我省 2021 年本科高校课程思政样板课程，立项河南大学“地理信息课程思政教学团队”等 31 个课程思政教学团队建设项目、河南农业大学“动物医学课程思政教学研究特色化示范中心”等 16 个课程思政教学

研究特色化示范中心建设项目。

课程思政建设项目是本科教学质量与教学改革工程的重要组成部分，各高校要高度重视，加强顶层设计，全面规划，循序渐进，以点带面，构建全面覆盖、类型丰富、层次递进、相互支撑的课程思政工作体系、教学体系和内容体系。要全面落实立德树人根本任务，发挥教师队伍“主力军”、课程建设“主阵地”、课堂教学“主渠道”作用，强化示范引领，强化资源共享，全面推进课程思政高质量建设，将思政工作体系贯通人才培养体系全过程，构建全员全程全方位育人大格局。

河南省本科高校课程思政教学团队和课程思政教学研究特色化示范中心建设期为两年，两个项目须填报立项建设任务书，建设期满后我厅将组织专家对项目进行验收，验收合格后将分别认定为河南省本科高校课程思政教学团队和课程思政教学研究特色化示范中心。各项目任务书一式两份，一份（含电子版）于12月10日前报送我厅备案，一份留校备查。

联系人：李展

电　话：0371-69691977

邮　箱：liz@haedu.gov.cn

材料报送地址：郑州轻工业大学东风校区办公楼416房间，联系人：霍松涛，电话：0371-66080653。

附件：1.2021年课程思政样板课程认定名单

2.2021 年课程思政教学团队立项建设名单

3.2021 年课程思政教学研究特色化示范中心立项建设名单

4.课程思政教学团队建设项目任务书

5.课程思政教学研究特色化示范中心建设项目任务书

2021 年 11 月 24 日

176	郑州工业应用技术学院	贾圣强	管理学	王恒，李平，牛进，陈耀贞，朱杰堂
177	郑州工业应用技术学院	尹卫平	天然药物认知与创新实践	杨新新，毛雅君，曹瑞梅，冯亚莉，李珂
178	商丘学院	刘健康	国际金融	董明皓，魏自花，樊红霞，付帅，孙霞
179	郑州升达经贸管理学院	王铮	大学生创业基础	王艳华，曹华莹，张芳，乔婵
180	商丘工学院	王彩峰	嵌入式系统原理及应用	冯彩英，杨娜，王晓惠，王垒，王俊仃
181	郑州商学院	祝利芳	审计学	刘金金，郝晨君，李芳，赵明雨，段培鸽
182	黄河交通学院	朱永琴	单片机原理及接口技术	成全之，解博江，侯凯文，金玉萍
183	郑州财经学院	王娟	管理会计学	段莎，刘洁辉，徐倩，邓璐，王爱娟
184	郑州财经学院	于晓娟	广告学概论	尹新富，刘蔚，夏丽华，王钰涵，李敏
185	安阳学院	任志芬	英语国家概况	张红彩，张强，任林芳，焦惠娟，苏卉
186	安阳学院	张曙光	计算机网络	董金明，韩可玉，孙燚，段紫薇，王富广
187	信阳学院	王燕红	中国近代史	黄成勇，张保同，胡志国，寇博文，陈功林
188	郑州工商学院	赵俊仙	市场营销学	曹云明，褚颜魁，梁君丽，宋亚培，任宁宁
189	郑州西亚斯学院	井艳红	剧目演唱	武秀之，王桂兰，魏冉，马斌，朱正华
190	郑州西亚斯学院	王银平	大学英语	李妍，任莉，代美丽，王丹丹，李斌
191	河南开封科技传媒学院	李俊	概率论与数理统计	张艳敏，孔彦玲，徐乙璐，薛风
192	河南开封科技传媒学院	苗霞	中国现代文学	张磊，刘洁，刘蕙心，孟若宇，吴亚强
193	中原科技学院	郭芬	大学英语 III	朱媛，雷丹，栗斐，段志华，任娇品
194	新乡医学院三全学院	李勇莉	组织学与胚胎学	周薇，魏慧平，刘晨曦，杨杰
195	新乡医学院三全学院	杨全中	生物化学与分子生物学	李照熙，王林翮，王亚娟，石霞，杨保胜

4. 河南省社会科学界联合会调研课题：新质生产力视域下数学与应用数学人才培养模式探究

2025年度河南省社会科学界联合会调研课题

立　项　通　知

河南开封科技传媒学院

裴伟娟　同志：

经专家评委会评审，您主持申报的2025年度省社科联调研课题《新质生产力视域下数学与应用数学人才培养模式探究》已中标，现予立项，其编号为：SKL—2025—1123。

为保证立项课题完成质量，特提出以下要求：

1. 课题组应按照《指南》要求和课题设计方案，认真组织实施。

2. 要在认真调查研究、掌握第一手资料的基础上，撰写出观点明确、论据充分、具有应用价值的调研报告。所有引文、资料、数据应注明出处，**调研报告正文实际字数不少于1万字。**

3. 为加强科研诚信建设，鼓励学术创新，调研课题拟结项的项目内容重复率不得高于30%，拟参与评奖的项目内容重复率不得高于20%；历史、古典文学类的项目内容重复率不得高于30%。**检测结果以中国知网科研成果检测系统的检测报告为准。省社科联将进行随机抽查，如发现抄袭或伪造检测结果的，撤销立项项目，并向所在单位进行通报，2年内不再受理其项目申报。**

4. 拟参与一等评选的项目须在2026年3月24日10时至3月31日17时登录河南省社科联调研课题管理信息系统提交阶段性研究成果，逾期不予受理。该成果应以调研报告形式呈现，论证严密，有观点、有认识，能体现课题开展情况与研究进度，并形成主要结论，字数不少于2500字，鼓励在有国家正式刊号的期刊上发表与研究课题相关的论文。阶段性成果电子版命名为课题编号，格式为PDF。未申报阶段性成果的，原则上不能参与一等评审。

5. 课题名称、课题负责人及成员不得更换，课题不得延期结项。

6. 课题完成后，务必于2026年6月23日10时至6月30日17时登录河南省社科联调研课题管理信息系统进行提交，逾期不予受理。电子文档名称为课题编号，格式为PDF。请将封面、目录、内容提要、正文、参考文献等内容按格式要求置于同一个文档中。

7. 课题成果格式模板，可通过中原人文社科网（http://www.hnskl.org）登录河南省社科联调研课题管理信息系统下载。

河南省社会科学界联合会

2025年10月13日

5. 河南省民办教育协会课题：基于结构分析法的《数学分析》“金课”建设研究

河南省民办教育协会课题

结项证书

经专家组鉴定，河南省民办教育协会审核，右列河南省民办教育协会课题验收合格，准予结项，特发此证。

河南省民办教育协会

2024年9月13日

课题名称：基于结构分析法的《数学分析》“金课”建设研究

承担单位：河南开封科技传媒学院

课题负责人：张玉培

课题参加者（共4名）：裴伟娟 张艳敏 王丹丹 刘康

结项形式：研究报告

证书编号：HNMXJ20241414

6. 河南省高等教育教学改革研究与实践项目：对接需求，强化实践--基于小学期制的应用型人才培养模式的创新研究与实践

2025年度河南省高等教育教学改革研究与实践项目（本科教育类）

鉴定证书

项目名称　对接需求，强化实践——基于小学期制的应用型人才培养模式的创新研究与实践

主 持 人　李　俊

项目成员　郑逢斌、王天仕、侯军伟、崔　璨、张艳敏、司鲲鹏、魏　瑞

完成单位　河南开封科技传媒学院

项目类型　重点项目

河南省教育厅

二〇二六年一月

文件号：教高〔2026〕5号　　项目编号：2024SJGLX0228

7. 教育部产学合作协同育人项目：基于数字经济方向的经济类专业实训平台建设

8. 河南省高等学校重点科研项目：广义粗髓集模型近似算子的优化及其应用研究

河南省高等学校重点科研项目结项证书

豫教科技【2020】0005号

该项目提交的研究资料完整，结项报告系统详实，经审查符合结项要求，准予结项。

河南省教育厅

2020年02月13日

项目名称：广义粗糙集模型近似算子的优化及其应用研究
立项时间：2016年07月01日
项目编号：17A120012
承担单位：商丘工学院
项目负责人：张艳敏
项目参加者（共12名）：

排序	姓名	性别	单位
2	梁俊奇	男	商丘师范学院，商丘工学院
3	庞帮艳	女	商丘工学院
4	杨娜	女	商丘工学院
5	史国永	男	商丘工学院
6	胡健	男	商丘工学院
7	马素玲	女	商丘工学院
8	于晓要	男	商丘工学院
9	郭志林	男	商丘师范学院
10	王洁	女	商丘工学院
11	张煜星	男	商丘工学院
12	赵树理	男	商丘师范学院

结项等级：合格

第三部分 教学成果校外推广应用及效果证明材料

1.商丘学院实践应用证明

2.安阳学院实践应用证明

1. 商丘学院实践应用证明

教学成果校外推广应用及效果证明

成果名称：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究		
成果应用单位：商丘学院		
面向对象及受益人数	☑教师	16
	☑学生	690

成果应用效果（应用后所取得的成效、应用前后对比等）

我院在计算机类专业公共数学课程的教学实践中，借鉴应用了河南开封科技传媒学院崔国忠教授主持的本科高校研究性教学改革研究与实践项目《基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究》的研究成果（立项文件号：教高[2023]388号，结项文件号教高[2026]5号）。

该项目以“结构分析法”为核心创新课堂教学，以“过程与能力”为导向改革评价机制，构建了研究性教学新模式。项目成果在我院公共数学课程教学中的应用成效突出，显著增强了学生对数学知识体系的结构化理解与探究能力，促进了教师教学观念的转变与专业成长，为我院大学数学课程教学改革提供了可借鉴的实践路径。

二级单位负责人签字：（盖章）

（学校盖章）

年 月 日

2. 安阳学院实践应用证明

教学成果校外推广应用及效果证明

成果名称：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究		
成果应用单位：安阳学院		
面向对象及受益人数	☑教师	28
	☑学生	520

成果应用效果（应用后所取得的成效、应用前后对比等）

我校在《数学分析》《高等数学》等课程的教学实践中，借鉴了河南开封科技传媒学院崔国忠教授主持的本科高校研究性教学改革研究与实践项目《基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究》的研究成果（立项文件：教高[2023]388 号，结项文件：教高[2026]5 号）。

该项目构建了“课前结构感知—课中结构探究—课后结构迁移”的研究性教学新模式，提出以“本原性问题”为起点重构教学内容、以“结构分析”为核心创新课堂教学、以“过程与能力”为导向改革评价机制等策略。该成果在数学专业课及公共数学中的推广应用成效显著，有效提升了学生参与讨论的积极性，并推动教师教学理念从知识传授向思维引领深度转型，对深化我校大学数学课程教学改革、培育学生创新思维与综合素养、提升育人成效，具有良好的示范效应与实践应用价值。

二级单位负责人签字：王永国

安阳学院 教务处

（学校盖章）

年 月 日

第四部分 教育教学类论文、论著

（一）教育教学类论文

1.关于几类积分极限的抽象化

2.例谈“结构分析法，形式统一法”在微积分问题解决中的应用

3.利用“结构分析－形式统一法”求解数学题目

4.Rolle 定理的结构分析与应用

5.结构分析法下洛必达法则应用机理分析

（二）论著：

1.论著：数学分析中的思想方法 ISBN ：9787030746320

2.论著：高等数学教学理论及其研究 ISBN ：9787574425958

（一）教育教学类论文

1. 关于几类积分极限的抽象化

第 28 卷 第 6 期　　高 等 数 学 研 究　　Vol. 28, No. 6
2025 年 11 月　　STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS　　Nov., 2025

doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2025.06.008

关于几类积分极限的抽象化

张玉培，崔国忠，李亚敏
（河南开封科技传媒学院 经济学院，河南 开封 475001）

摘　要　关于几类积分极限，本文结合一些研究生入学考试试题，利用结构分析思想方法将其实质抽象出来，得到若干定理，以加强对相关题型求解方法的掌握.

关键词　实分析；结构分析法；积分极限；挖洞法；拟合法

中图分类号　O171　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2025)06-0021-04

Abstractions of Several Kinds of Integral Limits

ZHANG Yupei, CUI Guozhong, and LI Yamin
(School of Economics, Henan Kaifeng College of Science Technology and Communication, Kaifeng 475001)

Abstract　With regard to several types of integral limits, this paper abstracts their underlying principles through structural analysis and establishes a number of theorems that enhance the understanding and mastery of related solution methods.

Keywords　real analysis, structural analysis, integral limit, burrowing, fitting

在数学分析的学习过程中，学习了定积分理论后，都会遇到一些综合性题目，其中有一类题目类型为由定积分所定义的数列或函数极限问题，这类题目也是研究生入学考试的常见题型. 从形式上看，这类题型是两种运算问题（定积分计算和极限计算），其求解的直接且有效的方法是利用函数列的一致收敛性理论的换序定理来解决，但是，此时还没有学习函数列的一致收敛性理论，况且，一般来说，所给的题型也不满足一致收敛性条件，因而，不能利用相关理论进行求解. 因此，研究这类题型的求解方法具有意义.

文[1]用不少篇幅专门讨论积分的极限，综合运用洛必达法则、积分中值定理、夹逼准则、积分和、可积的充要条件等方法对这类问题进行了求解. 对于具体对象，有时一题可用多种解法，如文[2]整理一道积分极限考题的七种解法，文[3][4]分别使用多种不同方法考察同一道积分极限考题，有时多个题目又可归为一类，形成一种思路，如文[3]将一类定积分极限的解法归为分区间讨论的方法；对于抽象对象，文[5]-[8]也都有所讨论，给出一些好的结论和处理方法，如文[7][8]分别给出一类积分极限问题的一般解法.

我们基于文[9][10]提出的结构分析思想方法对这类题型进行了分析研究，提炼出了这类题型的结构特点，挖掘出隐藏在解题过程的思想，总结形成了处理这类题型的方法——挖洞法，利用挖洞法研究了几类具有坏点的极限问题，并进一步结合函数列理论，形成了一般性的结论.

1　基本求解方法——挖洞法

问题提出：形如计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$、$\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 或证明其相应结论的题型，我们称为由定积分定义的数列或函数极限问题. 如何计算或证明相关的结论就是我们要研究的问题.

例 1　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x$.

收稿日期：2024-07-16　　**修改日期**：2025-09-10
基金项目：河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目（教高〔2023〕388 号，序号：180，项目名称：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究）.
作者简介：张玉培（1987—），女，河南巩义人，硕士，副教授，从事数学分析的教学研究，Email：342252571@qq.com.

结构分析　题型:由定积分定义的数列极限问题;结构特点:被积函数为函数列 $f_n(x)=\mathrm{e}^{x^n}$,具结构特点 $f_n(x)=\mathrm{e}^{x^n}\to\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ \mathrm{e}, & x=1,\end{cases}$ 在整个关联区间$[0,1]$上,其具有不同的收敛性质,特别在点 $x=1$ 处,其有别于其它点的收敛性质,或更深刻的区别是,$\{f_n(x)\}$在$[0,1)$内闭一致收敛于1,而在 $x=1$ 点处,破坏了其一致收敛性,因此,$x=1$ 是破坏其一致收敛性的点,我们称这样的点为坏点.因而,我们可以把结构特点抽象为函数列具有坏点.

确定思路　通过结构特点,我们类比已知理论,可以排除一致收敛性的换序定理和极限的运算法则,因而,思路只能是极限的定义,即猜测极限为1,用定义进行验证.

方法设计　由于有坏点存在,对应的方法为挖洞法(具体见下面的证明过程).

解　对任意的$\forall\varepsilon>0$,利用积分可加性,则

$$\int_0^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x,$$

将右端分别记为

$$I_n^{(1)}=\int_0^{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x,I_n^{(2)}=\int_{1-\varepsilon}^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x,$$

显然 $|I_n^{(2)}|\leqslant \mathrm{e}\varepsilon$,

又 $|I_n^{(1)}|\leqslant(1-\varepsilon)\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)^n}<\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)^n}$,

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)^n}=1$,由极限定义,存在 N,使得对任意的 $n>N$,有

$$\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)^n}<1+\varepsilon,$$

因而,当 $n>N$,有

$$1-(1+\mathrm{e})\varepsilon<1<\int_0^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x<1+(1+\mathrm{e})\varepsilon,$$

再次利用极限的定义,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x=1$.

抽象总结　1)我们将上述解题过程中利用的方法进行总结,形成了具有坏点的涉及整体量的求解的挖洞法,即将分布的区间$[0,1]$分为两部分,或相当于在区间上,以坏点为心,以 ε 为半径,挖洞将坏点挖去,由于此题中的坏点为右端点,挖去半个洞。应用过程中的技术要点是洞半径为 ε,是一个具有任意小或充分小的属性;作一个类比,整体量问题中存在坏点,相当于得了癌症,坏点就是癌细胞,治疗方法就是微创手术,挖洞将癌细胞挖去.

2)结论表明,坏点的存在并没有影响整体性的结论,即换序性定理仍然成立.

例1是这类问题的一个代表,我们将上述问题及其求解过程中的方法再抽象总结,形成了针对这类问题求解的挖洞方法,同时,我们将这类题目进行抽象,形成下面的结论.

2　具坏点的定积分定义的数列极限问题

例1　是一类题目中的一个代表,这样的例子可以设计很多,如下面的问题1:

问题1　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x=1,\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\mathrm{d}x=0,\cdots\cdots$

我们将问题1的结构特点进行挖掘,再抽象,利用挖洞法就可以建立更一般的结论:

定理1　若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b)$上内闭一致收敛于 c_1,在 $x=b$ 处收敛于 $c_2\neq c_1$;且$\{f_n(x)\}$在$(a,b]$上内闭一致有界,即$\forall\varepsilon>0$,$\{f_n(x)\}$在$[b-\varepsilon,b]$上一致有界 M(或更弱地,存在可积函数 $M(x)>0$,使得在$[b-\varepsilon,b]$上,$|f_n(x)|\leqslant M(x)$对每个 n 都成立),则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=c_1(b-a).$$

注意到所证结论可转化为$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-c_1]\mathrm{d}x=0$,故定理1等价于下述形式,记为定理1:

定理1　若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b)$上内闭一致收敛于0,在 $x=b$ 处收敛于 $c\neq0$,且$\{f_n(x)\}$在$(a,b]$上内闭一致有界 M,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

分析　事实上,这里极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b),\\ c\neq0, & x=b,\end{cases}$ 显然 $x=b$ 破坏了$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上的一致收敛性(称其为坏点),且 $f(x)\in R[a,b]$;又改变有限个点处的函数值不影响其可积性与积分值,不妨修改定义 $f(b)=0$,则 $\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0$.相较于函数列可积性定理要求一致收敛,定理1给出了积分运算与极限运算可交换的较弱条件.当然,定理1是Arzela有界收敛定理(在数学分析教材中通常不介绍)的一种形式,因此对于此类积分极限,定理1在应用上较为方便.

证明　挖洞法:在坏点 $x=b$ 附近挖充分小的"洞",即$\forall\varepsilon>0$,利用积分区间的可加性,有

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{b-\varepsilon} f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{b-\varepsilon}^b f_n(x)\mathrm{d}x,$$

这里记右端两个积分分别为 I_1,I_2.

对于 I_2,由条件可得

$$|I_2|\leqslant\int_{b-\varepsilon}^b |f_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\varepsilon,$$

对于 I_1,因为函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上内闭一致收敛于 0,故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上一致收敛于 0,从而对上述 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,对一切 $n>N$ 及 $x\in[a,b-\varepsilon]$,有 $|f_n(x)|<\varepsilon$,进一步地有 $|I_1|\leqslant\int_a^{b-\varepsilon}|f_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\varepsilon$;

综上,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|I_1|+|I_2|\leqslant(b-a)\varepsilon+M\varepsilon.$$

由数列极限定义,证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=0$.

证毕.

与问题 1 与定理 1 对偶地,有

问题 1′　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{n}}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n\mathrm{d}x=0$,……

定理 1′　若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,b]$ 上内闭一致收敛于 c_1,在 $x=a$ 处收敛于 $c_2\neq c_1$,且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上一致有界,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=c_1(b-a).$$

3　积分极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x$ 的两种处理方法

我们继续利用坏点理论和挖洞法研究具有积分核的由定积分定义的数列极限问题.

问题 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

定理 2　设非负函数列 $\{\varphi_n(x)\}$(常称 $\varphi_n(x)$ 为积分核)在 $(a,b]$ 上内闭一致收敛于 0(这里允许 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x=a$ 处发散于 ∞,也称 $x=a$ 为坏点),且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lambda\neq0$;又设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A<+\infty$;则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x=\lambda A.$$

证明　挖洞法:在坏点 $x=a$ 附近挖充分小的“洞”,即 $\forall\varepsilon>0$,这里 ε 依赖于 n,且 $\varepsilon\to0\ (n\to\infty)$(注意对于具体例子,可取 $\varepsilon=\frac{1}{n^\alpha}(\alpha>0)$,$\alpha$ 的取值视情况来定)

由积分区间的可加性,

$$\int_a^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+\varepsilon}^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

这里记右端两个积分分别为 I_1,I_2.

对于 I_1,由推广的积分第一中值定理,存在 $\xi_n\in(a,a+\varepsilon)$,使得 $I_1=f(\xi_n)\int_a^{a+\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x$;由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$ 及复合函数极限运算法则,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=A$;

又 $\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x+\int_{a+\varepsilon}^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x$,因为 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上一致收敛于 0,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a+\varepsilon}^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{a+\varepsilon}^b\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$,又由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lambda$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a+\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lambda$,从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_1=\lambda A$;

对于 I_2,由于 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上一致收敛于 0,故对上述 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,对一切 $n>N$ 及 $x\in[a+\varepsilon,b]$,有 $\varphi_n(x)<\varepsilon$;

又由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积,故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有界 M;

从而有 $|\varphi_n(x)f(x)|\leqslant M\varepsilon$,进一步地 $|I_2|\leqslant M(b-a)\varepsilon$. 即当 $n\to\infty$ 时,$I_2\to0$;

综上,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}I_1+\lim\limits_{n\to\infty}I_2=\lambda A$. 证毕.

或拟合法:将左右两端实现形式统一,合并到一起,即

注意到右端 $\lambda A=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b A\varphi_n(x)\mathrm{d}x$,将所证等式的非齐次形式转化为如下齐次形式:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积,所以存在 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$;

又由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,b-a)$,当 $x\in[a,a+\delta]$,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$;这里若有必要可重新定义 $f(a)=A$.

利用积分区间可加性，对一切 n，有

$$\int_a^b \varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x = \int_a^{a+\delta}\varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^b \varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x,$$

这里记右端两个积分分别为 I_1, I_2；

其中 $|I_1| \leqslant \int_a^{a+\delta}\varphi_n(x)|f(x)-A|\mathrm{d}x$

$$\leqslant \varepsilon\int_a^{a+\delta}\varphi_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x;$$

又由保序性及 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda \neq 0$，可得 $\lambda > 0$ 且对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，当 $n > N_1$ 时，有 $\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x < \lambda + 1$，从而 $|I_1| \leqslant (\lambda+1)\varepsilon$；

对于 I_2，由于 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $(a,b]$ 上内闭一致收敛于 0，即 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a+\delta,b]$ 上一致收敛于 0，故对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 > 0$，对一切 $n > N_2$ 及 $x \in [a+\delta,b]$，有 $\varphi_n(x) < \varepsilon$ 成立；从而

$$|I_2| \leqslant \int_{a+\delta}^b \varphi_n(x)|f(x)-A|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (M+|A|)\varepsilon\int_{a+\delta}^b \mathrm{d}x \leqslant (M+|A|)(b-a)\varepsilon.$$

综上，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，$\left|\int_a^b \varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x\right| \leqslant |I_1| + |I_2| \leqslant k\varepsilon$，这里 $k = (M+|A|)(b-a)+\lambda+1$.

故由数列定义，证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)[f(x)-A]\mathrm{d}x = 0. \quad \text{证毕.}$$

注意运用拟合法处理后段时，文[7]用的是数列的上极限，而我们考虑使用数列极限的定义来证明.

与问题 2 与定理 2 对偶地，有

问题 2′　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，在 $x=b$ 处左连续，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b (x-a)^n f(x)\mathrm{d}x = f(b).$$

若令 $x=a+(b-a)t$，则 $x\in[a,b]$ 对应 $t\in[0,1]$，问题 2′等价于下述问题：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1),$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，在 $x=1$ 处连续.

定理 2′　设非负函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上内闭一致收敛于 0（这里允许 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x=b$ 处发散于 ∞），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda \neq 0$；又设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A < +\infty$；则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda A.$$

4　对应的函数极限形式

上述具有坏点的由定积分定义的数列极限问题，将离散变量 n 连续化为连续变量，相应的问题可以推广，形成对应的含参量积分的极限问题. 我们继续利用坏点理论和挖洞法研究这类问题的求解.

问题 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

注意到，利用海涅定理对问题 2 作连续化处理：令 $h=\frac{1}{n}$，则 $n\to\infty$ 等价于 $h\to 0^+$，积分核 $\varphi_n(x) = \frac{n}{n^2x^2+1}$ 也相应地变形为 $\varphi(x,h) = \frac{h}{h^2+x^2}$，则问题 3 实质是问题 2 对应的函数极限（连续）形式. 抽象出来，可得到一般情形：

定理 3　设定义在 $[a,b]\times U(h_0)$ 的非负函数 $\varphi(x,h)$（仍称之为积分核）满足 $\lim\limits_{h\to h_0}\int_a^b \varphi(x,h)\mathrm{d}x = \lambda \neq 0$ 且当 $h\to h_0$ 时，$\varphi(x,h)$ 关于 x 在 $(a,b]$ 上内闭一致收敛于 0（这里允许在 $x=a$ 处，$\varphi(x,h)$ 当 $h\to h_0$ 时发散于 ∞，可称 $x=a$ 为坏点或瑕点）；又设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A < +\infty$；则

$$\lim_{h\to h_0}\int_a^b \varphi(x,h)f(x)\mathrm{d}x = \lambda A.$$

分析　定理 2 是数列极限形式，定理 3 是与之对应的函数极限形式，由二者关系可知，定理 3 同样可使用挖洞法或拟合法来处理，其中拟合法可参照文[7]的做法，不过文[7]考虑的是 $h_0=0$ 这一特殊情形；我们指出，挖洞法在使用时同样成立，只需在定理 2 的证明过程中将 n 改为 h，相应地 $\varphi_n(x)$ 改为 $\varphi(x,h)$，$n\to\infty$ 改为 $h\to h_0$ 即可.

问题 3′　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上内闭可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^{+\infty} h\mathrm{e}^{-hx}f(x)\mathrm{d}x = A.$$

相较于问题 3，从形式上来看，问题 3′研究的是反常积分的极限，实质上在定理 3 中考察 $x\in[0,\frac{1}{a}]$，并作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则 $[0,\frac{1}{a}]$ 变换为 $[a,+\infty)$，可得到下述定理，我们给出拟合法的相应证明过程，当然挖洞法也可以，只需将 $+\infty$ 视为坏点，在其附近挖洞，分为两个区间 $[a,X]$ 与 $[X,+\infty]$（这里 X 具有充分大的属性）来讨论即可.

（下转第 51 页）

$$\left|n^{m+2}\int_{1-\delta}^{1}x^n f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant \varepsilon T_n.$$

所以，$|\gamma_n|\leqslant MS_n+\varepsilon T_n$. 令 $n\to+\infty,\varepsilon\to 0^+$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\gamma_n|=0$.

综上，$\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n=(-1)^{m+1}f_-^{(m+1)}(1)$.

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析：上册[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2019.

[2] 谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边. 数学分析习题课讲义(下册)[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2022.

(上接第 24 页)

定理 3′ 设定义在$[a,+\infty)\times U(h_0)$的非负函数$\varphi(x,h)$(仍称之为积分核)满足$\lim\limits_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}\varphi(x,h)\mathrm{d}x=\lambda\neq 0$且当$h\to h_0$时，$\varphi(x,h)$关于$x\in[a,+\infty)$内闭一致地收敛于0；又设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上绝对可积，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<+\infty$；则

$$\lim_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}\varphi(x,h)f(x)\mathrm{d}x=\lambda A.$$

证明 因为$f(x)$在$[a,+\infty)$上绝对可积，所以存在$M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M,x\in[a,+\infty);$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，存在$X>a$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立；

由$\lim\limits_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}\varphi(x,h)\mathrm{d}x=\lambda\neq 0$，则对上述$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，当$h\in U(h_0,\delta_1)$时，有$\lambda-\varepsilon<\int_a^{+\infty}\varphi(x,h)\mathrm{d}x<\lambda+\varepsilon$；

又当$h\to h_0$时，$\varphi(x,h)$关于$x\in[a,+\infty)$内闭一致地收敛于0，则存在$\delta_2>0$，当$h\in U(h_0,\delta_2)$时，对一切的$x\in[a,X]$，有$\varphi(x,h)<\dfrac{\varepsilon}{X-a}$；

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$h\in U(h_0,\delta)$时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{+\infty}[f(x)-A]\varphi(x,h)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)-A|\varphi(x,h)\mathrm{d}x\\&=\int_a^{X}|f(x)-A|\varphi(x,h)\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}|f(x)-A|\varphi(x,h)\mathrm{d}x\\&\leqslant(M+|A|)\int_a^X\varphi(x,h)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_X^{+\infty}\varphi(x,h)\mathrm{d}x\\&\leqslant(M+|A|)\frac{\varepsilon}{X-a}\int_a^X\mathrm{d}x+\varepsilon\int_a^{+\infty}\varphi(x,h)\mathrm{d}x\\&\leqslant(M+|A|)\varepsilon+\varepsilon(\lambda+\varepsilon);\end{aligned}$$

由函数极限定义，

$$\lim_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}[f(x)-A]\varphi(x,h)\mathrm{d}x=0,\text{即}$$

$$\lim_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,h)\mathrm{d}x=\lim_{h\to h_0}\int_a^{+\infty}A\varphi(x,h)\mathrm{d}x=\lambda A.$$

5 小结

坏点理论和挖洞方法是我们针对一大类题型总结提炼出的针对性方法，这类问题在数学分析中广泛存在，挖洞方法应用于这类问题的求解也颇具效力. 事实上，数学分析的研究对象是“好”函数，研究内容是函数的分析性质. 但是，在研究相关问题时，有时会存在一些点，破坏掉了函数所具有的“好”的定性性质(如连续性、可微性、可积性等)和定量条件(如函数值或导数值不为 0 等)，这些点就是我们抽象形成的坏点. 还有一些命题或结论需要将已知结论从有限区间推广到无限区间，将“∞”视为一个点，也可以视为坏点，处理这类问题时，都可利用挖洞法. 如$f(x)$在$[a,b]$上具无限个不连续点$x_n\in[a,b]$且$\{x_n\}$收敛，则$f(x)$在$[a,b]$上可积，此命题证明就是挖洞法；再如，利用 Green 公式计算第二类曲线积分时，如果曲线所围的区域包含“坏点”，也是利用挖洞法解决，像这类问题还有很多，篇幅有限，我们在此不再一一论述.

参考文献

[1] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2021：252－266.

[2] 魏光美. 一道积分极限题的七种解法[J]. 高等数学研究，2022，25(06)：41－42＋50.

[3] 朱佑彬，黎金环，柴华岳. 关于一类定积分的极限[J]. 高等数学研究，2023，26(06)：16－19.

[4] 李静，马凤丽. 一个积分式求极限的级数解法[J]. 高等数学研究，2020，23(03)：47－48.

[5] 黄永忠，雷冬霞，吴洁，等. 反常积分号下取极限的两个定理及应用[J]. 大学数学，2017，33(03)：95－100.

[6] 黄永忠，王德荣，何涛. 与定积分有关的极限[J]. 大学数学，2019，35(02)：71－77.

[7] 黄永忠，吴洁. 与积分有关的一个极限及其应用[J]. 大学数学，2021，37(01)：51－57.

[8] 程舰. 一类含参量积分的极限问题[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版)，2005，(02)：89－90＋118.

[9] 崔国忠，石金娥，郭从洲. 数学分析[M]. 北京：科学出版社，2018.

[10] 崔国忠，郭从洲，王耀革. 数学分析中的思想方法[M]. 北京：科学出版社，2023.

2.例谈“结构分析法，形式统一法”在微积分问题解决中的应用

第24卷 第5期 高 等 数 学 研 究 Vol. 24, No. 5
2021年9月 STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS Sep., 2021

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.05.022

例谈“结构分析法,形式统一法”在微积分问题解决中的应用

张冬燕，崔国忠，王耀革
（信息工程大学 基础部，河南 郑州 450002）

摘　要　波利亚在其名著《怎样解题》中,对如何解题给出了一般性的解题思维程序:(1)理解题目;(2)拟定方案;(3)执行方案;(4)回顾,其中建立已有知识与未知量之间的联系,拟定解题方案是解题过程的关键,但是如何建立题目中未知量与已有知识联系,形成有效的解题思路和解题路径呢?本文提出并详细介绍了能有效沟通已有知识与当前题目,进而能有效制定具体解题路径的数学问题解决方法——“结构分析法,形式统一法”.

关键词　结构分析;形式统一;问题解决方法

中图分类号　O171　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2021)05－0064－04

Illustrating the “Structure Analysis” and “Formal Unification” in Calculus

ZHANG Dongyan, CHUI Guozhong, and WANG Yaoge
(Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract　In his masterpiece “How to solve problems”, George Polya provided a general program of thinking for problem solving: (1) understanding the subject; (2) formulating the scheme; (3) implementing the scheme; (4) reviewing, among which establishing a bridge between the existing knowledge and the unknown quantities, formulating the scheme are the core segments in the whole process of problem solving. But how to effectively search for the useful information related to the current subject with the existing knowledge and how to use them to solve the current subject? This paper presents, in details and with examples in Calculus, the methods of “structural analysis” and “formal unification” for effectively communicating between existing knowledge and current problem, and formulating problem-solving paths.

Keywords　structural analysis, formal unification, problem-solving

1　引言

著名美籍匈牙利裔数学家乔治·波利亚在其名著《怎样解题》中,对如何解题给出了一般性的解题思维程序.他将解题过程分为四个阶段:(1)理解题目;(2)拟定方案;(3)执行方案;(4)回顾,其中拟定方案是整个解题过程中最核心的环节.这个环节需要完成解题过程中最艰难的一步,即搭建已有知识与未知量之间的桥梁,拟定解题思路.波利亚的方法是在学生的最近发展区,设置启发性的提问促进已有知识与未知量联结的生成,形成解题思路,如提问“你知道一道与它有关的题目吗?尽量想出一道你所熟悉的具有相同或相似未知量的题目.”“你知道一条可能有用的定理吗?[1]”等等.然而正如波利亚所言:“这并不总是有效的[1]”.实践中面对千变万化的题目,常常搜肠刮肚,在已有知识库中搜索与题目相关的信息,却未必能恰好搜到确实有用的信息,而即使想到了相关有用的知识,简单的链接或类比、

收稿日期:2020－06－12　**修改日期**:2020－08－28
基金项目:信息工程大学教育教学项目(JXYJ2020C001).
作者简介:张冬燕(1979－),女,河南,硕士,副教授,基础数学. Email:qinzhm@chd.du.cn.
崔国忠(1966－),男,河南,博士,教授,应用数学. Email:cuigzh1966@163.com.

模仿曾经的经验、方法，也往往并不能解决问题. 怎样从已有知识库中有效提取出与当前题目有关且确实有用的信息呢？又该如何应用它们求解当前题目呢？波利亚告诉我们："如果无效，我们必须仔细考虑某些其他更适当的联系，并且探测题目的各个方面[1]"，那么，如何探测题目能确实打开我们的思维，寻找到有效的解题思路和解题路径呢？这也是我们在《高等数学》或《数学分析》教与学中所面临的亟待解决的问题——学生大多都能掌握定义、定理，而不能应用这些理论处理一些题目，即看到题目之后，不能形成有效的解题思路并设计出相应的具体的技术路线，理论学习与应用能力的脱节. 为此，我们在教学中进行了探索和实践，提出了"结构分析法"和"形式统一法"[2]解题方法，取得了良好的教学效果.

2　结构分析法和形式统一法

学习是为未来的工作储备理论技能和实践能力. 未来工作中任何问题的解决，和我们面对的一个具体的数学题目的解决本质上是相同的，大致需要两个阶段：确立思路阶段和设计方法阶段. 确立思路阶段主要解决用什么的问题，设计方法阶段主要解决怎么用的问题.

结构分析法要解决的正是"解题思路的确立"问题，即用什么理论或哪个定理(结论)解决问题，也即对怎样从先有知识库中提取出与当前题目关联紧密、确实有用的方法、定理(结论)这一问题的回答. 具体地说，结构分析就是对题目的条件结构和要证明的结论的结构进行分析，发现并确立结构的特点，类比已有知识系统中的理论(定理或结论)，通过对比条件和结论的结构特点，择其相同、相似(或相近)的已知理论、方法，用于解决问题，形成解决问题的思路. 结构分析法，简单概括之就是"分析结构，确立特点，类比已知，形成思路[2]". 那么分析题目的结构具体包含什么内容？具体的分析方法是什么呢？

任何事物都是形式和内容的统一. 在形式上，国内有学者[3]给出了问题结构的一般组成要素：问题的指向，疑项和应答域. 问题的指向是问题所指向的研究对象，疑项是问题中的疑问词，应答域是在问题的提法中所确定的一个域限[3]. 在内容上，郑毓信[4]认为，数学问题的结构有浅层结构和深层结构之分，问题所呈现的事实性内容和表达的形式内容可称为问题的浅层结构，问题内在的数学内容和方法论方面的内容称为问题的深层结构. 数学题目本质上都是数学问题，而作为问题家族中的一员，数学问题形式上应具有问题结构的一般要素，因此结合数学题目的内容结构特征，我们认为对于数学题目而言，组成其结构的基本要素也应是：题目的指向，疑项和应答域，只不过所谓题目的指向，指的应是题目所指向的数学内容或方法论方面的内容，疑项是题目要求解或要证明的结论，应答域则是对问题的结论有限制意义的已知条件. 明晰了题目的结构组成，分析题目的结构，分析的内容就主要包含两个方面：一是分析题目的指向，也即分析题目的深层次结构，依据题目所指向的数学内容或方法论方面的内容，判断题目的结构类型，对题目进行归类；二是分析题目的已知条件和要求解或要证明的结论的组成要素，要素的性质和要素的形式特点，从中归纳、发现题目的整体与局部的结构特点. 具体的分析方法有：逐次分析法和简化结构法. 所谓逐次分析，就是从大到小逐次分析，先对题目整体分析，然后逐次细节分析，从而全面挖掘题目中隐藏的信息，从各个方面揭示题目的结构特点. 毛主席说："要抓事物的主要矛盾". 简化结构法，就是抓取题目的关键信息，将题目信息中的主项(主要部分)予以保留，而甩掉无关项或次要项，把题目特殊化，简单化，使结构最简，结构越简单，越容易发现题目的结构特点，越容易暴露题目的深层结构，越容易确定解题思路.[2]

形式统一法要解决的正是如何应用已知知识的问题，即在确定的思路下，设计具体的解决方法，规划具体的解题路径，利用已知的定理(或结论)完成具体的解题过程和步骤. 具体来说，形式统一法就是将题目中的已知条件或要证明的结论，通过与已知的定理或结论的形式作类比，将研究对象向已知定理或结论的标准形式进行转化，通过形式转化统一化为标准形式，从而可以用已知的定理或结论进行求解. 形式统一法简言之就是：形式统一，设计路线.[2]

3　"结构分析法和形式统一法"在求解微积分问题中的应用

下面通过两道例题来说明这两个研究、分析和求解问题的重要方法.

已知重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$具有这样的结构特点：整体是幂指结构的、形如$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$的$1^{\infty}$型极限，组成元素中有两个因子$\dfrac{1}{\infty}$、$\infty$互为倒数关系.

这些结构特点为利用此重要极限进行极限的计算提供了思路和方法.

例1[2] 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

结构分析 从大到小分析. 题目的类型:求未定式极限,结构特点:幂指函数结构,1^{∞}型极限. 类比已知,与上述重要极限的结构相同,由此确定思路:用重要极限求解. 具体的方法是形式统一,向重要极限的标准结构进行转化,即向标准形式转化的形式统一法.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{x^2}}$

(第一次形式统一,底的形式统一)

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{x^2}}$(第二次形式统一,两个互为倒数因子的形式统一)$=e^{-2}$.

再来看一个有关中值问题的证明题. 先来分析常用的两个微分中值定理的结构.

Lagrange中值定理 若函数$f(x)$满足条件:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

结构分析 结论的结构相对复杂,涉及到中值点、区间的两个端点,我们抽象其特点为:两个分离的结构特征,即(1)等式两端中值点与端点分离;(2)右端区间$[a,b]$的左端点a和右端点b分离,分子和分母都是端点的差结构,所以右端也呈分离结构. 掌握这两个分离结构特征有利于该定理的应用.

Cauchy中值定理 若函数$f(x)$及$F(x)$满足条件:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导;(3)对任一$x\in(a,b)$,$F'(x)\neq 0$,那么在(a,b)内至少有一点ξ,使

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

结构分析 结论的结构除了具有与Lagrange中值定理类似的分离结构特点外,还具有特点①涉及两个函数及其导函数的关系,②两端都是商的结构. 这些特点便于将Cauchy中值定理和Lagrange中值定理区别使用.

例2[5] 证明:对任意$b>a>0$,存在$\xi\in(a,b)$,使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$.

结构分析 题目的类型是有关中值问题的证明题. 题目的类型往往潜在地决定了问题的求解. 这种类型的题目通常的解决思路是使用微分中值定理. 关键是使用哪个中值定理?对什么函数使用中值定理?如何用?为此,类比中值定理的结论的结构特征,利用形式统一的思想对要证明的等式进行转化. 首先,分离中值点和端点,结论转化为

$$(1-\xi)e^{\xi}=\frac{ae^b-be^a}{a-b}$$

注意到右端的区间的两个端点还没有分离,再次分离端点,结论再转化为

$$(1-\xi)e^{\xi}=\frac{\frac{1}{b}e^b-\frac{1}{a}e^a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}.$$

通过右端,类比中值定理,就可以形成具体的求解方法.

证明 法一 利用Lagrange中值定理证明. 记$F(x)=xe^{\frac{1}{x}}$,在$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$上利用Lagrange中值定理既得所证明的结论.

法二 利用Cauchy中值定理证明.

记$F(x)=\frac{1}{x}e^x$,$G(x)=\frac{1}{x}$,在$[a,b]$上利用Cauchy中值定理即可.

在这两道例题中,我们通过分析题目结构的类型,结构的元素组成,构成元素的性质、特点,由外而内,由浅入深,逐步挖掘题目的结构特点,类比对照已有知识,有效建立了已知理论与当前问题之间的联系,明确了解题思路. 求解题目如同指挥行军作战,确定了解题思路就像确定了作战战略,接下来还要制定具体的作战方案."形式统一法"以已知理论或公式的标准形式为指导,通过形式上的转化,缩小条件与结论形式上的差异,最终实现了利用已知理论或公式解决问题的战略初衷.

前苏联数学家及数学教育家辛钦(A. Ya. Shinchin)曾说:"一切数学学科的决定性特点总是某种形式化的方法. ……数学问题的解决,不能由它所反映的物体或现象的物质本性去解决,而只能由它的形式结构特点去解决. ""结构分析法和形式统一法"正是结构化思想与数学形式化思想在问题解决中的具体应用. 微积分理论中许多重要的概念、定理、公式都有较强的形式结构特征,如极限的各种类型,幂指函数,导数的定义,复合函数的求导法则,微分中值定理,定积分的定义,微分方程的各种解法等等. 因此"结构分析法和形式统一法"对求解这些概念、定理、

公式的基本训练题目，有广泛的适用性．不仅如此，在对题目的结构由整体到局部，由外至内，由浅入深的分析中，题目表象的外衣逐渐褪去而显露出其真正的含义来，这就使学生能本质地理解题目，进而能将求解方法自然迁移到具有相同或相似结构特点的题目，做到举一反三，以一当十．例如，求解了例 1 之后，再求解 1^∞ 型幂指函数的极限：(1)(2016 年全国大学生数学竞赛预赛）若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)=0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$；(2)(2011 年全国大学生数学竞赛决赛）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$，就会发现它们与例 1 具有相同的求解方法．再如例 2 的解题思路，同样有助于求解具有类似结构的中值问题[2]：(3)设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=e^{-\xi}[f(1)e-f(0)].$$

(4)设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导（其中 $a>0$），求证：$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

据此可以看到，“结构分析法和形式统一法”是能够有效沟通已有知识与当前题目，并能有效制定具体解题路径的问题解决方法．如果在微积分教学中持之以恒地训练学生应用这种方法去思考、分析问题，必能培养学生良好的数学分析意识，提升学生分析问题、解决问题的能力．

参考文献

[1] [美]G．波利亚著．怎样解题[M]．涂泓，冯承天译．上海：上海科技教育出版社，2011．11：6－7．

[2] 崔国忠主编．数学分析(一)[M]．北京：科学出版社，2018．7：17－18．

[3] 林定夷．科学中问题的结构与问题逻辑[J]．哲学研究，1988，(5)：32－38．

[4] 郑毓信．论数学问题的“深层结构”[J]．数学通报，1993，(12)：2－3．

[5] 裴礼文．数学分析中的典型问题与方法[M]．北京：高等教育出版社，2006．4：218．

[6] 同济大学数学系．高等数学(上)[M]．北京：高等教育出版社，2014．7．

（上接第 46 页）

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\cos\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+n\varphi_0),$$

则对于 $n+1$ 时，只证(1)，类似可证(2)．

$$\begin{aligned}
\text{左}&=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&=a^{n+1}\sin bx+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&\quad+b^{n+1}\sin\left(bx+\frac{n+1}{2}\pi\right)\\
&=a^{n+1}\sin bx+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})a^{n+1-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&\quad+b^{n+1}\sin\left(bx+\frac{n+1}{2}\pi\right)\\
&=a\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}a^{n+1-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&\quad+b^{n+1}\sin\left(bx+\frac{n+1}{2}\pi\right)\\
&=a\cdot(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+n\varphi_0)\\
&\quad+b\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k a^{n-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k+1}{2}\pi\right)\\
&\quad+b^{n+1}\sin\left(bx+\frac{n+1}{2}\pi\right)\\
&=a\cdot(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+n\varphi_0)\\
&\quad+b\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\sin\left(bx+\frac{k+1}{2}\pi\right)\\
&=a\cdot(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+n\varphi_0)\\
&\quad+b\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\cos\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)\\
&=a\cdot(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+n\varphi_0)\\
&\quad+b\cdot(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+n\varphi_0)\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[a\cdot\sin(bx+n\varphi_0)+b\cdot\cos(bx+n\varphi_0)]\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}\sin[bx+(n+1)\varphi_0]=\text{右}.
\end{aligned}$$

经过上述的推导，表明两种方法得到的同一函数的高阶导数虽然形式上看差别很大，但是本质上是一样的，这也解决了许多初学者的疑惑．

参考文献

[1] 华东师范大学数学系．数学分析[M]．5 版．北京：高等教育出版社，2019：56－59．

[2] 同济大学数学教研室．高等数学[M]．7 版．北京：高等教育出版社，2014．

[3] 卓里奇．数学分析[M]，4 版．北京：高等教育出版社，2006．

3.利用“结构分析－形式统一法”求解数学题目

Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 524-529
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105064

Hans汉斯

Solving Mathematical Problems by Structural Analysis Method and Formal Unification Method

Yaoge Wang, Guozhong Cui, Congzhou Guo

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: wyg711218@163.com

Received: Apr. 21st, 2020; accepted: May 13th, 2020; published: May 20th, 2020

Abstract

The study of advanced mathematics cannot be separated from solving problems. Problem-solving is the process of solving a problem. Advanced mathematics has a complete theoretical system, but there is no corresponding theoretical framework and unified method for solving problems. This paper puts forward the problem-solving theory of structural analysis and formal unification, and divides the problem-solving into two stages: the first stage is to use “structural analysis method” to explore the structure of the topic and establish “problem solving ideas”; the second stage is to use “formal unification method” to find the skills of problem solving and complete the “problem solving process”.

Keywords

Advanced Mathematics, Problem Solving Theory, Structural Analysis Method, Problem Solving Ideas, Unified Form Method, Problem Solving Process

利用“结构分析－形式统一法”求解数学题目

王耀革，崔国忠，郭从洲

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: wyg711218@163.com

收稿日期：2020年4月21日；录用日期：2020年5月13日；发布日期：2020年5月20日

摘 要

高等数学的学习离不开解题，解题的过程就是解决问题的过程，高等数学有完整的理论系统，但是解题

文章引用：王耀革，崔国忠，郭从洲. 利用“结构分析－形式统一法”求解数学题目[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 524-529.
DOI: 10.12677/pm.2020.105064

却没有相应的理论框架和统一的方法．本文提出“结构分析－形式统一法”解题方法，将解题分为两个阶段：第一阶段：利用“结构分析法”，探测题目的结构，确立“解题思路”；第二阶段：利用“形式统一法”，寻找解题的技巧，完成“解题过程”。

关键词

高等数学，解题方法，结构分析法，解题思路，形式统一法，解题过程

1. 引言

著名的美籍匈牙利数学家波利亚把善于解题作为掌握数学的一个重要标志，他有一句名言——“掌握数学就意味着善于解题”[1]。解题是对概念、定理的继续学习，是对方法的继续熟练，是一种思维活动，是由思想指导的。因此，缺乏理论自觉的解题实践会流于盲目或简单重复，为什么会有那么多的数学学困生？为什么解题现实中会有很多解题的误区？原因可能是多方面的，但与我们缺少“解题方法的理论”科学指导有关。鉴于此，我们经过深入的研究和长期实践，提炼出“结构分析－形式统一法”[2]解题理论，将解题分为两个阶段，第一阶段，利用“结构分析法”，分析题目的结构，确立题目特点，类比已知知识，形成“解题思路”；第二阶段，利用“形式统一”的技巧，将题目的条件或结论转化为相关已知知识的标准形式，完成解题的具体过程。

2. 解题的第一阶段：利用结构分析法，确立解题思路

所谓解题思路就是解决问题的思考方向，思考用什么知识(哪个概念或定理)解决问题，即主要解决“用什么的问题”。确立解题思路是解决问题过程中最关键的一步，如何确立解题思路？我们提出“结构分析法”，解决“思路确立”问题。

结构分析法是指从分析题目(条件和结论)的结构出发，分析题目条件和结论的结构特点，类比已知的知识(概念或定理)，通过对比条件和结论的结构特点，选择与其相似或相近的理论解决问题，形成解题思路，可以概括为：**分析结构，研析特点，类比已知，确立思路**。这里的关键步骤是分析结构，分析的内容包含题目的形式、类型、条件和要求解(证明)的结论的结构，结构分析的过程是一个激活知识、检索知识、提取知识、组织知识的过程。分析题目的方法可以采用从大到小逐次分析，即先对题目进行整体分析，然后逐次把大的问题分解为一些小问题，分析问题的实质，直捣问题的关键，为解题思路的确立提供有益的帮助。

3. 解题的第二阶段：利用形式统一法，完成解题过程

解题的第一阶段是“因题制宜”地选择正确的解题思路，解决了“用什么的问题”，为了实现解题目标还需要使用有效的解题方法，制定明确的解题策略，即解决“如何用的问题”。本文中，我们提出**“形式统一法”**来完成解题技术路线的设计。

形式统一法就是将题目中的条件或要证明的结论，通过与已知的概念和定理的形式作类比，如果题目属于熟悉的类型，就直接用相应的方法去解决；如果题目不属于熟悉的类型，那我们利用形式统一法将研究对象向熟悉类型的形式进行转化，不能直接转化为熟悉的类型，我们可以将其分解成若干小问题，

使每一个小问题都是熟悉的，或者揭示问题的深层结构，使问题的实质是熟悉的，还可以多次使用形式统一，不间断的变形习题，最终化为熟悉的问题，从而利用已知的定理和结论完成具体的解题过程和步骤，可以概括为：**形式统一，设计路线**。

4. 应用案例

例 1 [3] 求极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构为三角函数的分式结构，分子和分母是不同的三角函数，且 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时，分子、分母均趋于零。类比已知：在自变量过程中，分子分母同时趋近与零，且与三角函数有关，已知的极限是第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。确立思路：利用第一个重要极限求解。方法设计：利用形式统一法，首先将分子分母中的三角函数都统一为 $x-\frac{\pi}{3}$ 的函数，其次，重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的自变量变化过程是 $x\to 0$，本题是 $x\to\frac{\pi}{3}$，因此可用变量代换将形式统一到第一个重要极限的形式，再利用第一个重要极限求解。

解法 1 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}$ (第 1 次形式统一：分子分母中的变量形式统一)

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$ (第 2 次形式统一：作变量代换，使 $x\to\frac{\pi}{3}$ 转化成第一个重要极限所需的变量极限形式 $t\to 0$)

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{1-\cos t}{t}+\sqrt{3}\frac{\sin t}{t}}$ (第 3 形式统一：分子分母同除以 t，转化成重要极限形式)

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{2}=0$，因此，利用第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{1}{0+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法 2 结构特点：$\frac{0}{0}$ 型极限问题。类比已知：可以洛必达法则。于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x}=\frac{\cos 0}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 2 (全国大学生数学竞赛第五届预赛试题) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构为 1^∞ 型极限问题。类比已知：这个结构特点是第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 所处理的对象特点。确立思路：利用第二个重要极限求解。方法设计：利用形式统一法。具体的，$\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$ 的指数部分 n 是 ∞，底 $1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}$ 中已经具备 1，$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}$ 虽是无穷小，但是 $\pi\sqrt{1+4n^2}$ 是无穷大，这与我们常用的无穷小 $\sin x\ (x\to0)$ 形式不同，需要把它转化成无穷小。根据正弦函数的性质，$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)$，这样 $\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi$ 就转化成无穷小，但是，这样的无穷小不能满足我们处理 1^∞ 型极限问题中指数部分的需要，因此进一步将 $\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi$ 分子有理化处理，得

$$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$$

这样就将原式转化成 $1+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是所需无穷小的形式。指数部分相应的需要转化处理成 $\frac{1}{\alpha(x)}$ 的形式。然后利用海涅定理，将数列极限转化为函数极限，使用第二个重要极限即可求解。

解 由于 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$

故，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n$

由海涅定理，由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\right)^x\\&=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\cdot x\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi\cdot x}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}},\end{aligned}$$

故，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$。

例 3 [3] 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构属于 $\frac{0}{0}$ 型极限问题，且涉及三类基本初等函数——幂函数、三角函数和指数函数。类比已知：虽然属于 $\frac{0}{0}$ 型极限问题，但是用洛必达法则很麻烦，而已知的其它求解极限方法中只有泰勒公式可以将不同类型的函数形式统一成多项式的形式。确立思路：利用泰勒公式求解。方法设计：利用形式统一法，将题目中的三角函数和指数函数都利用泰勒公式转化为由幂函数构成的多项式，这样所求极限涉及的函数类型就只有幂函数，又由于 $x\to0$ 时 $\sin x\sim x$，因此分母 $x^3\sin x$ 等价于 x^4，根据形式统一原则，$\cos x$ 和 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在利用泰勒公式展开时，只需展到 x^4 的 Peano 型余项即可。

解 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)$，得 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)$，

又有 $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)$，得 $\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4}=-\frac{1}{12}$。

例 4 [4] 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

结构分析 题型结构：对二元函数极限不存在结论的验证。类比已知：验证多元函数极限 $\lim\limits_{P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)}f(P)$ 不存在常用的方法是让 $P(x,y)$ 取不同的方式趋于 $P(x_0,y_0)$。确立思路：寻找 $P(x,y)$ 趋于 $P(x_0,y_0)$ 特殊的方式，使得极限不存在。寻找有效的特殊路径的很难，我们利用：形式统一法，观察函数的结构，分子和分母中相同的项为 x^2y^2，不同的一项为 $(x-y)^2$，我们将 $(x-y)^2$ 的结构统一成 x^2y^2 的形式，只需令 $x-y=kxy$，即取 $y=\frac{x}{1+kx}$ （当 $x\to 0$ 时，显然 $y\to 0$），将分子和分母统一成一样的形式。

证明 取 $y=\frac{x}{1+kx}$，$x\to 0$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{y=\frac{x}{1+kx}\\x\to 0}}\frac{x^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2}.$$

该极限随 k 的不同而不同，故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

例 5 计算 $I=\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y):|x|+|y|\le 1\right\}$。

结构分析 首先分析被积函数的结构，被积函数的分子 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ 和分母 $\sqrt{x+y+3}$ 涉及到两类因子 $(x-y)$ 和 $(x+y)$；然后分析积分区域 $D=\left\{(x,y):|x|+|y|\le 1\right\}$，实际是 $x-y=\pm 1$ 和 $x+y=\pm 1$ 所围成的区域，即积分区域也涉及到因子 $(x-y)$ 和 $(x+y)$。因此，可以利用变量代换 $\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}$，简化 D 的结构为 $D_{uv}:\begin{cases}-1\le u\le 1\\-1\le v\le 1\end{cases}$，进而简化计算。

解法 1 作变换 $\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}$，$D$ 转化为 $D_{uv}=\left\{(u,v):-1\le u\le 1,-1\le v\le 1\right\}$，且 $J=-1/2$，故

$$I=\frac{1}{2}\iint_{D_{uv}}\frac{uv}{\sqrt{u+3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u}{\sqrt{u+3}}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}v\mathrm{d}v=0.$$

解法 2 对积分结构进行深入观察，如果注意到被积函数和积分区域的轮换对称性质，利用这个性质使计算会更简单。

记 $f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x+y+3}},g(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{x+y+3}}$，则 $f(x,y)=g(y,x)$，又区域 D 关于 x、y 轮换对等，即 x 换成 y，对应的 y 换成 x 时，区域不变，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因而，故 $I=0$。

5. 结束语

数学解题是一种创造性活动。谁也无法教会我们所有的题目，重要的是通过有限道题的学习去领悟那种解无限道题的数学机智[5]。正确的结构分析能为题意的本质理解与思路的确立创造成功的条件，而形式统一法又为我们提供了解题的技巧，是数学研究、分析和求解问题的重要方法，所以，结构分析-形式统一法是一种行之有效的解题方法。这里利用结构分析法和形式统一法仅给出了高等数学课程中的几个题目的解题思路和具体的方法设计，只希望通过几个题目的思考和训练，优化认知结构、提高思维能力、增强数学能力，学会“数学的思维”，养成良好的数学解决问题的方式和习惯，培养坚实的数学素养。

基金项目

国家自然科学基金(41471314)；兵种级教学成果预研项目。

参考文献

[1] 波利亚. 怎样解题[M]. 阎育苏, 译. 北京: 科学出版社, 1982.
[2] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
[3] 汤家凤. 高等数学辅导讲义[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2018.
[4] 同济大学数学系. 《高等数学》(第七版下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[5] 罗增儒. 中学数学解题的理论与实践[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008.

4.Rolle 定理的结构分析与应用

Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1316-1319
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117147

Hans汉斯

Rolle定理的结构分析与应用

王耀革，郭从洲，崔国忠

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: wyg711218@163.com

收稿日期：2021年5月27日；录用日期：2021年6月29日；发布日期：2021年7月7日

摘 要

对Rolle定理进行结构分析和解读，为学生掌握Rolle定理及其应用提供帮助。

关键词

Rolle定理，结构分析，应用

Structure Analysis and Application of Rolle Theorem

Yaoge Wang, Congzhou Guo, Guozhong Cui

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: wyg711218@163.com

Received: May 27th, 2021; accepted: Jun. 29th, 2021; published: Jul. 7th, 2021

Abstract

The structure of Rolle theorem is analyzed and interpreted, which can help students master Rolle theorem and its application.

Keywords

Rolle Theorem, Structural Analysis, Application

文章引用: 王耀革, 郭从洲, 崔国忠. Rolle 定理的结构分析与应用[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1316-1319.
DOI: 10.12677/pm.2021.117147

1. 引言

微分中值定理是微分理论的核心，它由若干个结论组成，Rolle定理是微分中值定理的第一个结论，也是最简单、最基本的一个结论。通过对Rolle定理结构分析和应用分析，开拓学生思路，为掌握Rolle定理及其应用提供帮助。

2. Rolle 定理及其结构分析

定理 1 [1] (Rolle 定理) 若 $f(x)$ 满足如下条件：1) 在 $[a,b]$ 上连续；2) 在 (a,b) 内可导；3) $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

结构分析 ① 定理中的条件 1)和条件 2)是函数的定性条件，是微分中值定理的标志，若题目中有这样的条件，应优先考虑用微分中值定理求解；② 从定理的结论看，Rolle 定理给出了导函数零点的存在性，进一步可以抽象为函数的零点(或方程的根)的存在性，因此，与连续函数的零点定理具有相同的作用，由此决定了此定理的作用对象特征，至此，研究零点问题的工具有两个，一个是零点定理，一个是 Rolle 定理；③ 定理的定量条件是函数具有两个等值点 $f(x_1)=f(x_2)$，这和零点定理的条件不同，进一步明确了应用 Rolle 定理的关键是寻找满足具有两个等值点的函数；④ 注意定理的证明思想，即通过确定内部极值点，然后利用 Fermat 定理得到结论，当不能直接利用 Rolle 定理得到结论时，可以考虑利用对应的证明思想(即确定内部极值点)来解决。

3. Rolle 定理的应用分析

题型一 证明 $f^{(n)}(\xi)=0$。

证明的思路是对函数 $f^{(n-1)}(x)$ 应用 Rolle 定理，问题的关键是寻找 $f^{(n-1)}(x)$ 的两个等值点。

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$。

结构分析：题型为导函数零点的存在性；类比已知：研究函数零点的工具有连续函数的零点定理和导函数的零点存在性的 Rolle 定理；两个思路都是考虑之一，从关联紧密的角度看，确定思路为 Rolle 定理；方法设计：根据 Rolle 定理，需要验证的定量条件是两个等值点的确定，类比题目中已知条件，已经有了一个函数值信息 $f(3)=1$，因此，重难点是寻找函数的等值点，即确定另一个满足函数值等于 1 的点 x_0，这就需要利用附加条件来完成，这是连续函数的介值问题，即需要从 0、1、2 三个点与 x_0 点处的函数值进行比较，由此形成对应的解题方法。因此，需先证存在 $x_0\in[0,3)$，使得 $f(x_0)=1$。

证明 因 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上有最大值 M 与最小值 m，故 $m\le f(0),f(1),f(2)\le M$，因此 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$，由介值定理，至少存在一点 $x_0\in[0,2]$，使得 $f(x_0)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$。

因为 $f(x_0)=f(3)=1$，且 $f(x)$ 在 $[x_0,3]$ 上连续，在 $(x_0,3)$ 内可导，由 Rolle 定理知，必存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$。

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 非负且有直到三阶的连续导数，方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 有两个不同的实根，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=0$。

结构分析 题型：从结论形式看，属于导函数的零点问题，思路为应用 Rolle 定理；类比已知：处理方法就是对二阶导函数利用 Rolle 定理，因而，必须寻求两个使得二阶导数相等的点，为此，只需寻找三个使得一阶导数相等的点，或寻找四个使函数值相等的点，这就是证明题目的出发点。在寻找这些点时，

要注意一些特殊点处的性质，如函数的零点、一阶导函数的零点(驻点)，而由 Fermat 定理，可导极值点一定是驻点，因此，确定极值点也是确定一阶导函数零点的方法。

证明 已知方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 有两个不同的实根，设 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则由 Rolle 定理，存在 $x_3\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(x_3)=0$。

(分析 显然，剩下的两个一阶导数的零点要从极值点中寻找。)

由于函数非负，因而，x_1 和 x_2 是函数的两个极小值点，故

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0,$$

利用 Rolle 定理，则存在 $\xi_1\in(x_1,x_3)$，$\xi_2\in(x_3,x_2)$，使得

$$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$$

再次用 Rolle 定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'''(\xi)=0$。

题型二[2] 待证结论中含有一个中值 ξ，不含其它字母。

证明的基本思路是构造适当的辅助函数，使用 Rolle 定理进行证明。因此，如何构造辅助函数是证明的关键点也是难点，常用的构造辅助函数的方法是原函数法。

情形一 若待证结论是两项相加减的形式(两项中 $f(\xi)$ 与 $f'(\xi)$ 仅相差一阶导数)，如 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$。用原函数法构造辅助函数，需要先把 ξ 换成 x，$f'(x)+g(x)f(x)=0$，再将其改写成 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+g(x)=0$，进一步还原成 $\left[\ln f(x)\right]'+\left[\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right]'=0$，利用结构一致的原理，将 $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 也改写成对数函数形式，可得 $\left[\ln f(x)\right]'+\left[\ln \mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$，合并对数得 $\left[\ln f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$，因此，辅助函数便可取为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$ (注意积分的下限不一定取 0，也可以是其它常数，根据函数 $g(x)$ 定义域的要求确定即可)。

如，① 欲证 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x 2\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2x}f(x)$；

② 欲证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，需证 $f'(\xi)+\dfrac{2}{\xi}f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_1^x \frac{2}{t}\mathrm{d}t}=x^2f(x)$；

③ 欲证 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$，需证 $f'(\xi)+f(\xi)f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$；

④ 欲证 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$，需证 $\left[f'(\xi)\right]'-\dfrac{2}{1-\xi}f'(\xi)=0$，令 $g(\xi)=f'(\xi)$，即需证 $g'(\xi)-\dfrac{2}{1-\xi}g(\xi)=0$，只需构造辅助函数为 $\varphi(x)=g(x)\mathrm{e}^{\int_2^x -\frac{2}{1-t}\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2\ln(x-1)}g(x)=(x-1)^2f'(x)$ 即可；

……

情形二 若待证结论是两项以上相加减的形式，或特殊的两项相加减(两项中所含 $f(\xi)$ 与 $f''(\xi)$ 相差两阶导数)的形式，需将所证结论进行适当分组，然后再使用原函数法构造辅助函数，也可称为分组构造原函数法。

如，① 欲证 $f'(\xi)-f(\xi)+2\xi=2$，把 ξ 换成 x，$f'(x)-f(x)+2x=2$，分组 $\left[f(x)-2x\right]'-\left[f(x)-2x\right]=0$，令 $f(x)-2x=g(x)$，转化为情形一对应的形式 $g'(x)-g(x)=0$，利用情形一中构造辅助函数的方法可得辅助函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[f(x)-2x\right]$；

② 欲证 $f''(\xi)-f(\xi)=0$，把 ξ 换成 x，并插项分组 $\left[f''(x)-f'(x)\right]+\left[f'(x)-f(x)\right]=0$，即 $\left[f'(x)-f(x)\right]'+\left[f'(x)-f(x)\right]=0$，令 $f'(x)-f(x)=g(x)$，转化为情形一对应的形式 $g'(x)+g(x)=0$，利用情形一中构造辅助函数的方法可得辅助函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}\left[f'(x)-f(x)\right]$。

题型三 待证结论中含有一个中值 ξ，还含字母 a、b。

情形一 字母 a、b 与 ξ 可分离。将含字母 a、b 的部分与含 ξ 的部分进行分离，各自还原为原函数，再应用 Rolle 定理。

如，欲证 $f(a)-f(\xi)=\xi f'(\xi)$，把 ξ 换成 x，并改写成 $f(a)-[f(x)+xf'(x)]=0$，含字母 a、b 的部分与含 x 的部分各自还原为原函数，得 $[f(a)x]'-[xf(x)]'=0$，进一步还原得 $[f(a)x-xf(x)]'=0$，因此，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(a)x-xf(x)$。

情形二 字母 a、b 与 ξ 不可分离。此时，一般采用凑微分法，先将 ξ 换为 x，并将结论的形式进行去分母，移项处理，整理成 $h(x)=0$ 的形式，再找出 $h(x)$ 的原函数，应用 Rolle 定理。

如，欲证 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，把 ξ 换成 x，去分母，移项，整理成

$f(a)g'(x)-f(x)g'(x)-f'(x)g(x)+f'(x)g(b)=0$，即 $f(a)g'(x)-[f(x)g(x)]'+f'(x)g(b)=0$，因此，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$。

4. 结语

Rolle 定理主要研究导函数的零点问题，验证的定性条件是闭区间上连续，开区间内可导，这些一般的初等函数都能达到，验证的定量条件是等值点的确定，这些点都是特殊的点，通常是区间端点、最值点以及条件中隐藏特殊信息的点。由于最终要将特殊点作用于函数，因此，寻找满足 Rolle 定理条件，尤其是满足定量条件的函数是应用 Rolle 定理的难点，我们通过对不同类型中值问题的辅助函数构造方法的总结归纳，形成较系统的解题技巧，对于学生掌握 Rolle 定理的应用有一定的帮助。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 汤家凤. 高等数学辅导讲义[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2018: 50-57.

5. 结构分析法下洛必达法则应用机理分析

Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 120-127
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412413

Hans汉斯

结构分析法下洛必达法则应用机理分析

李亚敏，崔国忠

河南开封科技传媒学院经济学院，河南 开封

收稿日期：2024年11月2日；录用日期：2024年12月3日；发布日期：2024年12月25日

摘　要

洛必达法则是极限理论中非常重要的研究极限问题的工具。本文利用结构分析方法，对洛必达法则的结构进行了详尽的分析，给出了该法则的作用机理、理论基础、作用对象的结构特征、应用过程中应注意的问题，对该法则进行了较为全面的解读，从而使得我们该法则的认识达到了新的深度、高度、广度，为全面掌握该法则奠定了基础。

关键词

洛必达法则，结构分析法，待定型极限，大学数学教育

Analysis of the Application Mechanism of L'Hopital's Rule under Structural Analysis Method

Yamin Li, Guozhong Cui

School of Economics, Henan Kaifeng College of Science Technology and Communication, Kaifeng Henan

Received: Nov. 2nd, 2024; accepted: Dec. 3rd, 2024; published: Dec. 25th, 2024

Abstract

L'Hospital's rule is a very important tool to study limit problems in limit theory. This paper makes a detailed analysis of the structure of the L'Hospital's rule by using structural analysis methods, gives the mechanism, theoretical basis, structural characteristics of the object of action, and problems that should be paid attention to in the application process of the law, and gives a more comprehensive interpretation of the law. Thus, our understanding of the law has reached a new depth, height, and breadth, laying the foundation for a comprehensive grasp of the law.

文章引用：李亚敏，崔国忠. 结构分析法下洛必达法则应用机理分析[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 120-127.
DOI: 10.12677/pm.2024.1412413

Keywords

L'Hospital's Rule, Structural Analysis Method, Undetermined Limit, College Mathematics Education

1. 引言

极限理论是《高等数学》的理论基础，其在整个高等数学体系中的重要地位和作用是不言而喻的，牢固掌握和熟练应用极限理论解决具体的极限问题在整个高等数学的学习中至关重要。求极限的类型分为确定型极限问题和待定型极限问题。因确定型极限的计算只需运用四则运算法则、等价无穷小代换等就可以很容易求出，过于简单，所以在各种考试中都不作考察；而考察做多一类极限问题是待定型极限问题。最早学习求解待定型极限的方法是两个重要极限，但所能求解的题目有限。因此，如何使学生深刻掌握待定型极限的分析研究方法、熟练运用求解的理论工具解决待定型极限问题是在高等数学教学中必须要解决的问题。

洛必达法则作为柯西中值定理的重要应用，是高等数学中研究、解决待定型极限问题的核心理论和主要工具。从教学内容看，洛必达法则并不复杂，因此，从教而言，教师并不感到难教；从学而言，学生也不感到难学和难用。然而，正是这些表面现象掩盖了洛必达法则教学中存在的问题：流于形式的教与学，只触及到了教学内容的皮毛而没有挖掘出其本质核心，使得对教学内容的认知没有达到应有的深度、广度和高度，这也是高等数学教学过程中存在的普遍现象。

任何一门课程的学习都是以最终的应用为终极目标——应用所学习的理论解决工程技术领域或理论研究领域中的问题，推动科学技术和社会的进步与发展；而要达到熟练应用的层面必须深刻掌握基本理论以及隐藏在基本理论下的丰富的分析问题、研究问题、解决问题的思想方法。对一个结论或工具的学习也是如此，而要达到如此境界必须对其进行深度的挖掘、高度的分析和广度的解读，而非仅仅停留在文字层面的会读或会背，也非简简单单地模仿应用。为什么学习并会背了高等数学中的一些结论和定理，也能看懂应用这些结论和定理解决问题(解题过程)，却不能自主应用解决问题(不会做题)？这正是高等数学教学中存在的实践问题。

因此，在教学课堂上，没有显现出数学教学课堂的理性特色，没有显现逻辑特征，没有体现分析问题、研究问题的数学思维方式和素养，没有充分挖掘文字符号下隐藏的丰富的解决问题的思想方法，没有构造出引人入胜的教学意境，没有体现数学课堂的魅力，是数学课程课堂教学中的“教”存在的重大问题；没有被课堂教学所吸引全身心投入课堂学习，只会背定义、定理而不能用它们解决具体的问题是教学过程中的“学”存在的主要问题。

高等教育具有强烈的时代背景，新的时代对高等教育提出了时代要求，将时代要求贯彻到高等数学的教学中，实现高等数学的时代教学目标，上述存在的教与学中的问题是高等数学教学中的障碍，是必须要解决的主要问题。

任何问题的解决都要经历两个阶段：解题思想的形成阶段与具体方法和路线的设计阶段。第一个阶段确立问题解决的方向，解决“用什么”的问题，即利用哪个已知的理论解决问题，由此确定解决问题的思路；第二个阶段确立解决问题的方法，解决“怎么用”的问题，即设计具体的技术路线，如何利用已

知理论解决问题，确立解决问题的具体方法。

有鉴于此，崔国忠等[1]在教学实践中对上述教学过程中存在的问题进行了研究，从结构学角度对教学内容进行解读，将课堂教学内容化为具体问题的解决，将科学研究的一般思想方法与课堂教学有机融合，提出了确立思路的“结构分析法”和技术路线设计的“形式统一法”。其基本思想[1]：通过对定理、问题的结构进行分析，分析其已知的条件、要证明或求解的结论，与已知的定义、定理等进行类比，寻找与求解的问题关联最紧密的已知理论，由此确定用什么理论解决问题，从而确定解决问题的思路，并进一步将条件或结论的结构向已知的定理中的条件或结论从形式上进行统一，进行标准化处理，为利用已知的定理解决问题创造条件，从而形成“形式统一”的技术路线设计的一般性方法。张冬燕等[2]、王耀革等[3] [4]在文献[1]的基础上针对具体知识模块进一步对结构分析法做了详尽的阐述。

本文针对洛必达法则教学中存在的对应问题，运用结构分析方法，从结构学的角度对洛必达法则进行全面剖析，基于求导和函数结构的关系，分析了洛必达法则的作用机理，洛必达法则应用的理论基础，洛必达法则应用中的逻辑关系，全方位对洛必达法则进行解读。通过解读，使得对洛必达法则的认知将会达到新的深度、广度和广度，将其应用于教学可以有效地解决洛必达法则教与学过程中存在的问题。

2. 洛必达法则的结构分析

2.1. 洛必达法则

洛必达法则有各种不同的形式，我们仅以有限点处的$\frac{0}{0}$型结论为例。

定理 1 洛必达法则[5]设

1) 函数$f(x)$和$g(x)$在$\mathring{U}(a,\delta)$上可导且$g'(x)\neq 0$；

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$或$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$；

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$为有限数或$+\infty$或$-\infty$)，

则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

洛必达法则的证明在本文不在赘述，其详细的证明过程见教材[5]。

2.2. 洛必达法则的结构分析

2.2.1. 定理的作用

从定理的结论结构看定理的作用。

定理作用 根据定理的结论，该定理应用于计算极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$。

作用对象的特征 根据条件，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$是$\frac{0}{0}$待定型极限，这是其作用对象的特征。

由此总结出该定理的作用是应用于待定型函数极限的计算。

2.2.2. 定理的应用机理分析

定理应用逻辑 从数学表达式$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$的逻辑看定理的应用逻辑。结论表明，洛必达

法则应用于极限计算时，是通过将 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的计算转化为计算 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 来实现的，这表明了洛必达法则的作用方向或应用逻辑。

应用机理 从科学研究的一般方法论对应用机理的再分析。从科研角度，任何问题的求解都是从结构上化繁为简——结构越简单，越容易挖掘其结构特点，越容易确立解决问题的思路，越容易设计具体的解决方法。作为一个科学结论，洛必达法则应用于极限计算时，必定满足上述的要求。因此，洛必达法则应用机理表明，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的结构应该比 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的结构简单，或者 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的结构应该比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的结构简单。比较二者的结构，二者结构上的差别本质是函数和其导函数结构上的差别，如果说 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的结构比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的结构简单，所体现出来的一个是通过求导，改变了函数结构，使其结构发生了简单化。

那么，求导能改变函数的结构并使其简单化吗？为此，我们从结构角度对高等数学的研究对象——函数进行分析。

高等数学的研究对象是函数，高等数学属于古典分析理论，其研究对象是“好”函数，也即初等函数。初等函数是由基本初等函数构造而成。因此，我们以初等函数的基本组成元素——基本初等函数为例，考察求导与函数的结构变化，基本初等函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，我们从其中选择一个基本元素为代表，考查求导与函数结构的关系。下面是基本初等函数的求导公式：

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1},\quad \left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x,\quad \left(a^x\right)'=a^x\ln a,$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (\sin x)'=\cos x,\quad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

从结构角度分析，基于求导与函数结构关系可以将基本初等函数进行分类，一类是求导没有改变结构，或基本结构不变，具备这种结构特征的基本初等函数有两个：三角函数和指数函数，三角函数求导还是三角函数，指数函数求导还是指数函数，其基本结构不变。一类是求导彻底改变结构，这样的函数也有两个：对数函数和反三角函数，对数函数的导数是有理函数，反三角函数的导数是无理函数，故而从结构的角度，对数函数、反三角函数的求导彻底改变并简化结构；幂函数介于二者之间，其求导后虽没有改变结构，但实现了降幂，虽然不是结构上的彻底简化，也是某种程度上的结构简化(降幂)。

因此，求导简化结构的这种关系为利用求导改变结构，进而简化结构的各种计算提供了理论基础。洛必达法则正是以此理论基础建立起来的计算复杂结构的待定型极限的重要工具。

2.2.3. 应用过程分析

通过上述解读，在应用洛必达法则求解具体的函数极限时，首先分析其结构特征，验证其特征是否与洛必达法则的作用对象特征相匹配，若满足其作用对象的结构特征，可以考虑利用洛必达法则进行求解，由此，确立了问题求解的思路，即解决了“用什么”的问题；其应用过程相对简单，带入公式具体计算即可；但是，在应用时，经常遇到非标准的待定型极限，此时，需要利用形式统一的思想对其进行标准化，比如计算 $0\cdot\infty$ 型待定型极限时，通常需要转化为标准的 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型待定型极限，在此转化过程中必须坚持求导改变并简化结构的原则，选择合适的转化方式，这是转化过程中的理论依据，是设计具体技术路线的逻辑基础，这是在解题过程教学中必须要挖掘并明确的解题逻辑。

通过上述分析，一个简单的洛必达法则，其背后隐藏了丰富的研究问题、分析问题、解决问题的思想方法。在教学过程中，如果将上述的东西挖掘出来呈现于教学课堂，使得课堂教学丰富多彩，更加突出了数学课堂的理性特色、严密的逻辑性思维、分析问题、解决问题的能力的培养，使得学生不仅了解结论的表面形式，更会使学生深刻理解其所以然，从而，将课堂教学推到新的深度、高度和广度。

2.3. 应用举例分析

下面，我们通过一些例子深刻理解洛必达法则及其应用。

任何题目的计算或证明，其本质和工程技术领域或社会生活中问题的解决是相同的，都需要两个阶段：确立思路和具体技术路线的设计。我们通过下面的例子也简要说明这两个阶段的分析与解决的过程模块。

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$。

结构分析 题型：函数极限的计算；**结构特征**：由于 $\lim\limits_{x\to1}\ln\cos(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}\left(1-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)=0$，这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型待定型极限；**类比已知**：解决待定型极限的高级工具就是洛必达法则(低级工具还有定义、两边加定理，从逻辑上，优先考虑高级工具)；**思路确立**：洛必达法则；**方法设计**：由于这是一个标准的 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，直接利用洛必达法则，带入公式进行计算即可(对复杂定理的应用方法设计，需要一个相对复杂的过程，一般是将条件结构向定理的条件结构进行形式统一，为应用定理创造条件，方法设计的思路就是围绕条件结构的形式统一而进行的)。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}}$—洛必达法则简化结构，达到形式统一

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$——用等价无穷小简化结构

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=-\dfrac{4}{\pi^2}$。——仍为 $\dfrac{0}{0}$ 型，继续使用洛必达法则简化结构

总结 从上述解题过程看，通过求导改变了复杂因子(对数因子、三角函数因子)的结构，利用洛必达法则，使得分子和分母两种不同的结构在极限计算中实现了形式统一，统一为最简单的幂结构，从而实现了化繁为简，实现了同一种结构下的分子和分母的处理(体现了同类项合并处理的思想)，最终实现极限的计算。

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$。(2012 年考研数学三第 15 题)

结构分析 题型：函数极限的计算；**结构特征**：从结构看，$\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x^2}-e^{2-2\cos x}\right)=0$，故该极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，**类比已知**：连续使用洛必达法则来求，但这样做计算过程十分复杂；**思路确立**：洛必达法则，等价无穷小替换；**方法设计**：为使计算达到最简，首先分离极限已知的非零因子，然后用等价无穷小因子替换，最后使用洛必达法则简化计算。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}$——分离极限已知的非零因子

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}\text{——等价无穷小替换}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}\text{——连续用洛必达法则简化结构}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}\text{——等价无穷小替换}$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$。

结构分析 题型：函数极限的计算；**结构特征**：该函数是由常函数、幂函数和反三角函数三种不同结构的因子组成。由于 $x\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)=0$，故该极限为 $0\cdot\infty$ 型；**类比已知**：乘积类型的极限，可转化为型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则；**思路确立**：洛必达法则，等价无穷小替换。**方法设计**：如何转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型？按照求导简单的原则转化成比值形式，“下放”简单因子转化为 $\dfrac{0}{0}$。型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，即需把简单因子转移到分母上。那么何为简单因子？求导尽可能简单的因子。即把求导尽可能简单的因子转移到分母上，这样可使计算尽可能简单。本例将 x 转型为分母，即将 x 变换为 $\dfrac{1}{x}$ (化不定 ∞ 为确定 0)，把该极限化为 $\dfrac{0}{0}$ 型。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}$——恒等变形，转化为已知解法的结构：$\dfrac{0}{0}$ 型

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}\text{——洛必达法则简化结构，达到形式统一}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2+x^2}=\frac{1}{2}\text{——运用已知公式，即抓大头}$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$。(2020 年考研数学一第 9 题)

结构分析 题型：函数极限的计算；**结构特征**：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-1}=0$、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}=0$，该极限是 $\infty-\infty$ 型；**类比已知**：不可直接使用洛必达法则，可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则；**思路确立**：洛必达法则，等价无穷小替换；**方法设计**：需要先通分转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型后再使用洛必达法则，且只要满足洛必达法则的条件，就可反复多次使用洛必达法则

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}$——通分后化为 $\dfrac{0}{0}$ 型，优先用等价无穷小简化结构

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}\text{——洛必达法则简化结构}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{x}}{2x}$$ ——该极限结构仍为$\frac{0}{0}$型，继续使用洛必达法则简化结构

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^{2}}-\mathrm{e}^{x}}{2}=-1$$ ——极限四则运算

例 5 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$.(1998 年考研数学四第三题)

结构分析 题型：数列极限的计算；**结构特征**：从结构看，由于$\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，故本题为数列极限的$1^{\infty}$型待定型极限。**类比已知**：众所周知，求解$1^{\infty}$型函数极限的方法是洛必达法则，那么可否把数列极限转化为函数极限来求解呢？数列极限与函数极限之间的关系——海涅定理；**思路确立**：海涅定理，洛必达法则；**方法设计**：因对于离散变量$n\in\mathrm{N}_{+}$求导是没有意义的，故不可直接使用洛必达法则。改变其结构，将该极限连续化，转化为求函数极限：$\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$，再由海涅定理得$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$。

解 将该极限连续化，转化为$\frac{0}{0}$求函数极限：$\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$，取对数作恒等变形$\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 0^{+}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^{2}}\ln\frac{\tan x}{x}}$，于是指数部分的极限：

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{2}}\ln\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{2}}\ln\left(1+\frac{\tan x}{x}-1\right)$$ ——恒等变形

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{2}}\cdot\frac{\tan x-x}{x}$$ ——优先用等价无穷小简化结构

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\tan x-x}{x^{3}}$$ ——该极限为$\frac{0}{0}$型，洛必达法则简化结构

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sec^{2}x-1}{3x^{2}}$$ ——利用恒等式$\sec^{2}x-1=\tan^{2}x$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\tan^{2}x}{3x^{2}}=\frac{1}{3}$$ ——再次使用等价无穷小即得结果

再由海涅定理得$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 0^{+}}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$。

通过以上例子的求解，使用结构分析法解题是把已知的条件逐条罗列出来，对比已知的结论和解题方法，确定解题思路，即化整为零，逐个击破。通过结构分析法来讲解洛必达法则计算极限的过程中体现$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{2}}\cdot\frac{\tan x-x}{x}$了化繁为简、化未知为已知的思想。由此教师在上课的过程中可以如盐化水似的融入课程思政。以此告诉学生，在遇到困难，一头雾水，没有办法时，不要慌张，要沉着冷静，先把需要解决的问题细化，分成一个一个的小问题，再看现存的方法是否可以解决，若不能解决，那就从已知条件和知点出发，开展头脑风暴，寻找解决办法。要有刻苦专研，咬定青山不放松的精神，办法总

比困难多。

3. 结论

运用结构分析法求解极限题目时，先观察其结构，逐个分析，类比已知，进而找到求解方法。每次在使用洛必达法则之前，务必考察是否满足洛必达法则的条件，若不满足决不可使用；即使满足洛必达法则的条件，也要遵循四大原则：1) 优先使用极限的四则运算：在代数和中第一时间把极限存在的部分拆分出来、在积商中第一时间分离非零因子；2) 优先使用等价无穷小替换；3) 其他五种待定型先转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，再使用洛必达法则，转化方法如图 1；4) 数列极限必须转化为函数极限才能使用法则。

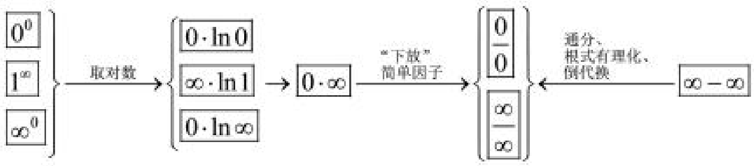


Figure 1. Methods for transforming other undetermined types into type $\frac{0}{0}$ or type $\frac{\infty}{\infty}$

图 1. 其他待定型转化为型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的方法

基金项目

河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目，教高[2023]388 号，立项序号：180，项目名称：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究；河南省教育课程改革研究项目(2024-JSJYYB-120)。

参考文献

[1] 崔国忠主编. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 17-18.

[2] 张冬燕, 崔国忠, 王耀革. 例谈“结构分析法, 形式统一法”在微积分问题解决中的应用[J]. 高等数学研究, 2021, 24(5): 64-67.

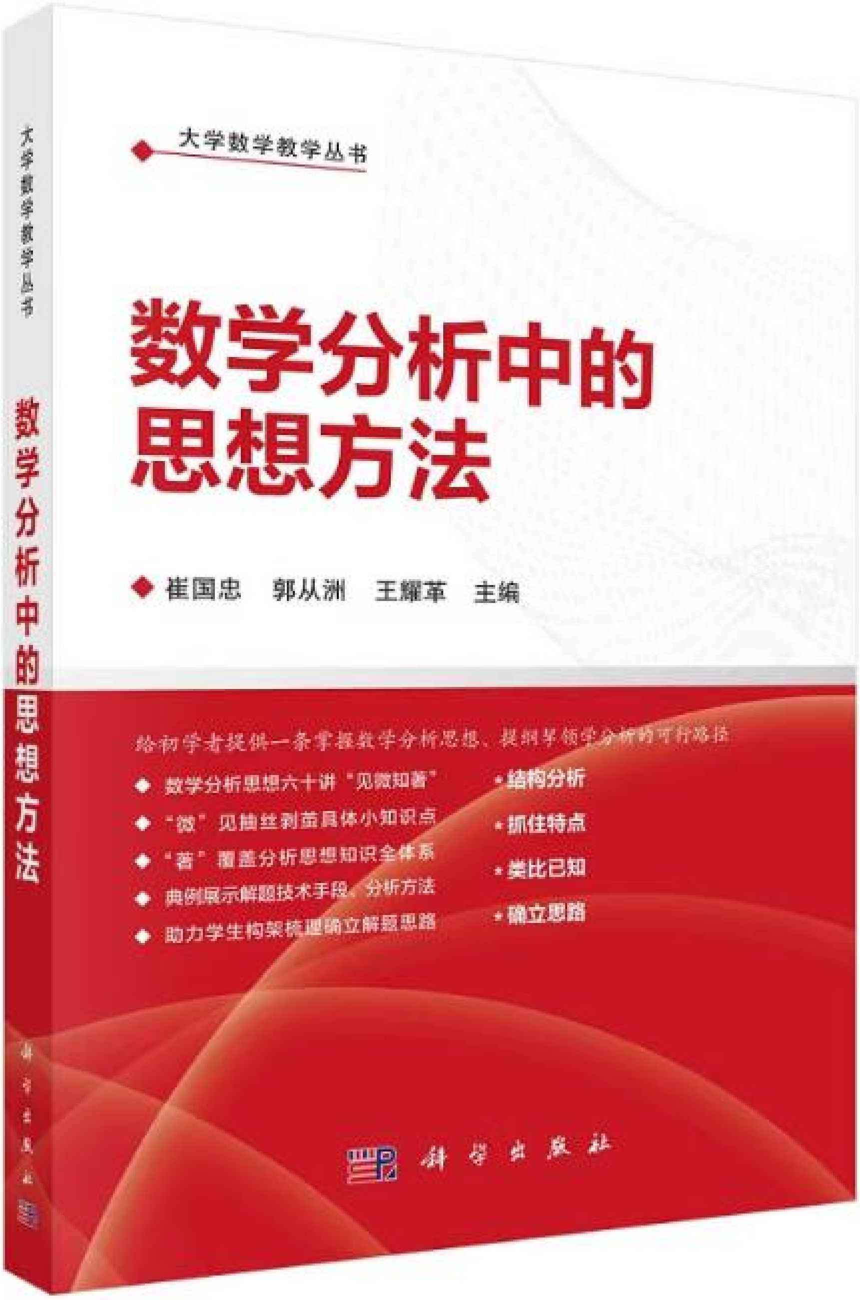
[3] 王耀革, 张冬燕, 郭从洲. 从一道全国大学生数学竞赛试题浅谈形式统一解题法[J]. 高等数学研究, 2022, 25(6): 58-60.

[4] 王耀革, 郭从洲, 刘倩. 拉格朗日中值定理的结构分析及其应用[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 276-279.

[5] 同济大学数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 132-136.

（二）论著：

1.论著：数学分析中的思想方法 ISBN ：9787030746320



大学数学教学丛书

数学分析中的思想方法

崔国忠　郭从洲　王耀革　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据数学分析课程知识点的正常教学顺序设计，共六十讲. 主要通过极限、实数基本定理、微积分和无穷级数等教学内容介绍数学分析中的思想方法. 书中内容既有细致到具体小知识点的思想方法，也有覆盖到数学分析大知识体系的思想方法. 通过这些基本思想方法的讲解，使读者能够在较短时间内掌握数学分析思想，对数学分析内容有深刻的理解，也可以掌握挖掘数学思想方法的方法.

本书可作为普通高等院校数学系学生学习数学分析的辅导书和任课教师的教学助手，也可作为数学爱好者的参考图书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析中的思想方法/崔国忠，郭从洲，王耀革主编. —北京：科学出版社，2023.6

大学数学教学丛书

ISBN 978-7-03-074632-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔… ②郭… ③王… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023) 第 013213 号

责任编辑：张中兴 梁 清 贾晓瑞／责任校对：杨聪敏
责任印制：张 伟／封面设计：蓝正设计

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2023 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2023 年 6 月第一次印刷 印张：19 1/2
字数：393 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

2018 年, 在科学出版社的帮助下, 我们出版了一套基于结构分析的《数学分析》教材, 希望能以独特的统一方法揭示数学分析经典理论中隐含的数学思想和方法. 经过几年的教学实践和思考, 我们总感觉受教学时长的限制, 仅通过教材无法完全表达其中的内涵, 于是就萌生了单独写一本数学分析教学参考书或者科普读物的想法, 用来介绍数学分析中蕴含的思想方法.

数学分析是以微积分为主要内容的一门数学系主干课程, 它是很多后续课程的基础, 它的很多处理问题的思想方法, 比如定量化分析思想、形式统一思想、化繁为简思想、从特殊到一般的思想等等, 几乎影响了所有的理工科领域. 数学中的思想方法不会是独立存在的, 它一定表现在某个具体的问题当中, 从具体问题中抽象出来, 并应用到一个个的新问题中去. 这个规律就告诉我们, 在数学分析教学中, 教师要通过一个具体的表象或问题, 挖掘其中的数学内涵, 形成基本概念和准确明晰的结论或定理, 并将该结论或定理传递到工程应用中去, 完成一个微知识环, 从而让学生感受到数学内在的能量和魅力.

本书根据数学分析课程知识点的教学顺序撰写, 以 “讲” 的形式区分 “章” 或 “节”. 首先, 以概要的形式总结微积分中的思想方法, 延续了自编《数学分析》教材的编写脉络; 其次, 借助本原性问题驱动理论, 从数学理论、历史背景、认知规律、价值体现四个维度, 阐述当时历史视角下人类认知数学的客观过程; 最后, 用 “简单小结” 凝练数学内涵、表述数学思想.

本书的编著目的是希望能够提升学生发现问题、分析问题、解决问题的能力;

让学生感受数学之美, 热爱数学、热爱科学, 探索未知、勇攀知识高峰. 这与 2020 年教育部印发的《高等学校课程思政建设指导纲要》中对理学、工学类专业课程的指导意见完全一致. 借课程思政教学改革的东风, 在信息工程大学基础部和科学出版社的大力支持下, 本书得以出版, 在此表示深深的谢意!

受编者水平限制, 书中难免存在缺点与疏漏, 恳请广大读者不吝指正.

编 者

2023 年 1 月

目　录

2.论著：高等数学教学理论及其研究 ISBN ：9787574425958

高等数学教学理论及其研究

赵丽娟　裴伟娟　张晋芳　著

吉林科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教学理论及其研究 / 赵丽娟, 裴伟娟, 张晋芳著. -- 长春 : 吉林科学技术出版社, 2025. 7.
ISBN 978-7-5744-2595-8

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025B8H357 号

高等数学教学理论及其研究
Gaodeng Shuxue Jiaoxue Lilun Jiqi Yanjiu

作　　者　赵丽娟　裴伟娟　张晋芳
出 版 人　宛　霞
责任编辑　蒋红涛
封面设计　刘云辉
制　　版　刘云辉
幅面尺寸　185㎜×260㎜
开　　本　16
字　　数　295 千字
印　　张　13
印　　数　1-1500 册
版　　次　2025 年 7 月第 1 版
印　　次　2025 年 7 月第 1 次印刷

出　　版　吉林科学技术出版社
发　　行　吉林科学技术出版社
地　　址　长春市南关区福祉大路 5788 号出版大厦 A 座
邮　　编　130118
发行部电话/传真　0431—81629529　81629530　81629531
81629532　81629533　81629534
储运部电话　0431-86059116
编辑部电话　0431-81629510
印　　刷　廊坊市印艺阁数字科技有限公司

书　　号　ISBN 978-7-5744-2595-8
定　　价　75.00 元

前　言

高等数学作为现代科学技术的基石，其教学理论和方法的探索与研究对于培养创新型人才具有重要意义。本书《高等数学教学理论及其研究》旨在系统阐述高等数学教学理念、内容构建、教学方法与策略、教学模式探索与创新、教学过程中的关键问题、教学评价与反馈，以及现代教育技术在高等数学教学中的应用和特殊问题与解决策略，同时还展望了高等数学教学的未来趋势。

全书共八章，内容涵盖了高等数学教学理念与内容构建、教学方法与策略、教学模式探索与创新、教学过程中的关键问题、教学评价与反馈，以及现代教育技术在高等数学教学中的应用、特殊问题与解决策略，以及未来趋势与展望等多个关键领域。

本书第一章至第三章聚焦于高等数学教学理念与内容构建、教学方法与策略、教学模式探索与创新，详细介绍了高等数学教学的理念更新、内容设计与优化、目标与评价，以及传统与现代教学方法的融合、教学策略的运用、教学手段的更新，以及理论与实践相结合的教学模式、研究性教学模式的构建、教学模式的创新。第四章至第五章探讨了高等数学教学过程中的关键问题和教学评价与反馈，解析了教师角色与专业发展、学生学习动机与策略、课程整合与交叉融合，以及教学评价体系的构建、教学反馈机制的建立、教学质量的持续提升。第六章至第七章则从现代教育技术在高等数学教学中的应用和特殊问题与解决策略的角度，探讨了多媒体教学资源的开发与利用、网络教学平台的建设与应用、在线教学与远程教育，以及高等数学学习困难与对策、高等数学教学中的伦理与法律问题、高等数学教学改革与创新中的挑战。第八章则从高等数学教学的未来趋势与展望的角度，探讨了高等数学教学发展的国际趋势、信息技术对高等数学教学的革新，以及高等数学教学的可持续发展。

本书针对高等数学教学中存在的问题，从课程设置、教学模式、评价体系等方面建立适应新工科发展的教学新模式，以培养更多创新型、应用型数学人才，进一步推动数学教学理论的创新发展。

本书由长治幼儿师范高等专科学校赵丽娟、河南开封科技传媒学院裴伟娟、大同煤炭职业技术学院张晋芳共同撰写完成。具体撰写分工如下：赵丽娟负责撰写第三章至第六章的内容（共计 13 万字）；裴伟娟负责撰写第一章和第二章的内容（共计 9 万字）；张晋芳负责撰写第七章和第八章的内容（共计 7.5 万字）。全书由赵丽娟、裴伟娟、张晋芳负责统稿完成。

目 录

第五部分 其他奖励及荣誉

1.校级教学成果奖

2.开封市优秀教师

3.全国大学生数学竞赛河南赛区优秀指导教师

4.校级教学优秀奖

5.学科竞赛获奖证书

6.学生发表论文

7.河南省大学生创新训练计划立项

1.校级教学成果奖

河南开封科技传媒学院高等教育教学成果奖

证 书

成果名称：基于结构分析法的大学数学课程研究性教学模式探究

完 成 人：崔国忠 栗文辉 裴伟娟 张艳敏 李亚敏 段中雨 刘 康 王丹丹

获奖等级：一等奖

证书编号：KCJXCG2026007

为表彰学校高等教育教学成果奖获得者，

特颁发此证书。

河南开封科技传媒学院

二〇二六年四月

2.开封市优秀教师

张艳敏 同志：

被评为2022年度

优秀教师。

开封市人力资源和社会保障局

开封市教育体育局

2022年9月

忠诚人民

教育事业

3.全国大学生数学竞赛河南赛区优秀指导教师


荣誉证书

河南开封科技传媒学院　张艳敏　荣获第十四届全国大学生数学竞赛河南赛区优秀指导教师称号，特发此证。

编号：CMSHN(师)2022029

河南省数学会

二零二三年五月

荣誉证书

河南开封科技传媒学院 刘康 荣获第十五届全国大学生数学竞赛河南赛区优秀指导教师称号，特发此证，以资鼓励。

编号：CMSHN(师)2023032

河南省数学会

二〇二四年六月

4. 校级教学优秀奖


荣誉证书

HONORARY CREDENTIAL

张艳敏 同志：

荣获河南开封科技传媒学院2023-2024年度“教学优秀奖”荣誉称号。

河南开封科技传媒学院

二〇二四年九月

荣誉证书

HONORARY CREDENTIAL

裴伟娟　同志：

在 2022–2023 学年教学工作中表现突出，成效显著，荣获“教学优秀奖”

河南开封科技传媒学院

二〇二三年九月

荣誉证书

HONORARY CREDENTIAL

王丹丹 同志：

荣获河南开封科技传媒学院2024-2025年度

“教学优秀奖”荣誉称号。

河南开封科技传媒学院

二〇二五年九月

荣誉证书

HONORARY CREDENTIAL

裴伟娟 同志：

荣获河南开封科技传媒学院2024-2025年度“教学优秀奖”荣誉称号。

河南开封科技传媒学院

二〇二五年九月

荣誉证书

刘　康　老师：

在2019—2020学年课堂(实验)教学过程中，教学态度认真，教学内容充实，教学方法先进，教学效果优秀，获得“河南大学民生学院2019—2020学年课堂（实验）教学优秀奖”。

特发此证，以资鼓励！

证书编号：MSKTSY2020094

河南大学民生学院

二〇二一年一月

5.学科竞赛获奖证书

获奖证书

certificate of award

河南开封科技传媒学院的参赛作品《基于SSA—ELM混合模型的ECT流型识别优化方法研究》，在2025年（第十一届）全国大学生统计建模大赛 河南赛区 赛区选拔赛中，荣获本科生组一等奖。

参赛队员： 李明毓、高婉秦、宋鸣涛

指导老师： 栗文辉

证书编号：20252601A0063

中国统计教育学会

二〇二五年八月


CUMCM
2025全国大学生数学建模竞赛
获 奖 证 书
河南开封科技传媒学院
学生:路佳萍、彭新悦、曹雪静
荣获
河南赛区 省级一等 奖
指导老师：李亚敏
中国工业与应用数学会
Mathematical Contest in Modeling

2023全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

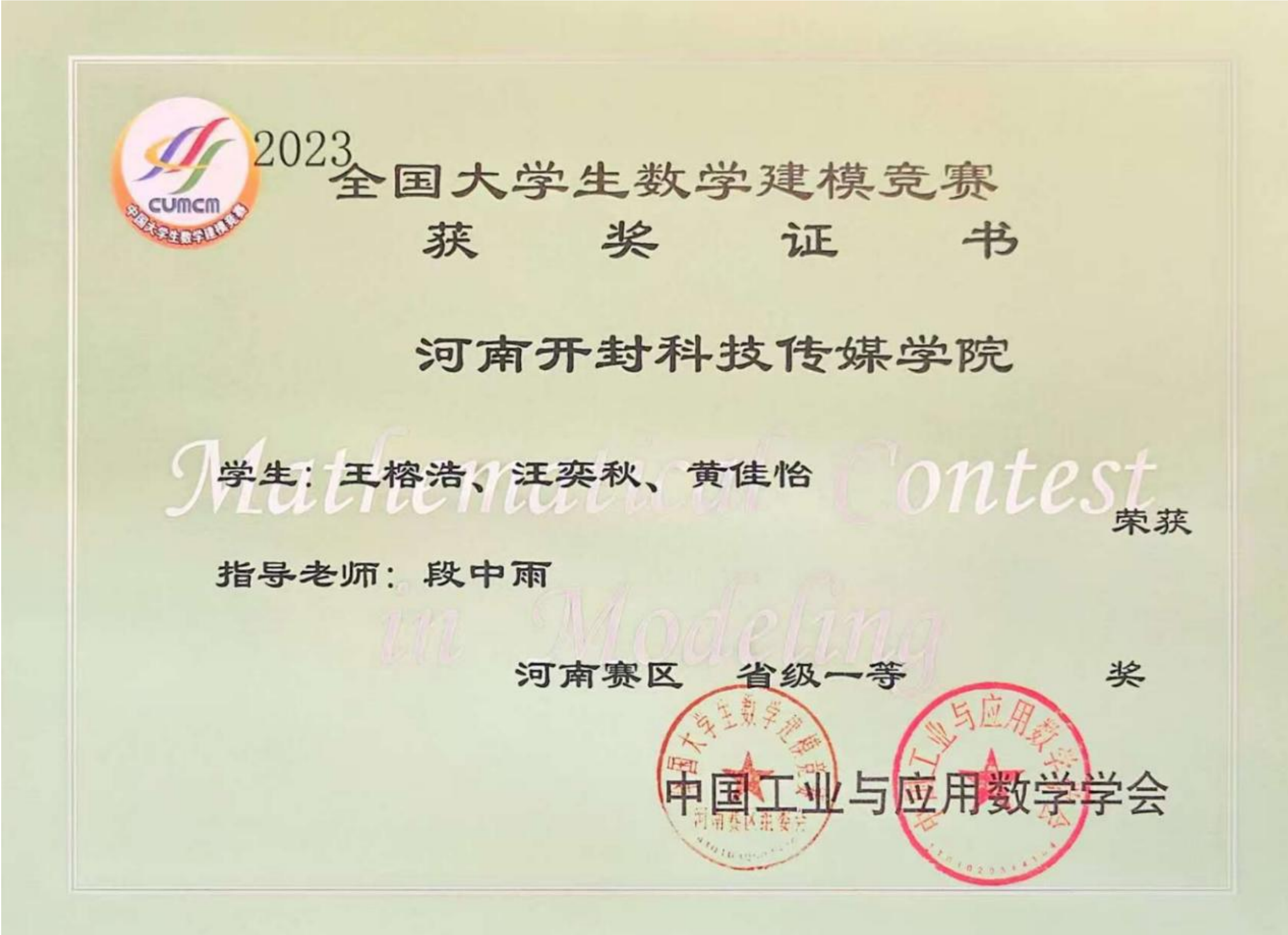
学生：顾广卓、王辰亮、奚孝光

指导老师：裴伟娟

荣获

河南赛区 省级一等 奖

中国工业与应用数学会


2023全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：王榕浩、汪奕秋、黄佳怡

荣获

指导老师：段中雨

河南赛区 省级一等 奖

中国工业与应用数学学会

2022

全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南大学民生学院

学生：郝振凯、郑遇琪、张辉武

指导老师：裴伟娟

荣获

河南赛区 省级一等 奖

中国工业与应用数学会

2022

全国大学生数学建模竞赛

获　奖　证　书

河南大学民生学院

Mathematical Contest in Modeling

学生：张子露、焦佳乐、王瑶珂　　荣获

指导老师：李亚敏

河南赛区　省级一等　　奖

中国工业与应用数学学会


2022

全国大学生数学建模竞赛

获　奖　证　书

河南大学民生学院

学生：周　飞、范忠良、刘旭东　　荣获

指导老师：李亚敏

河南赛区　省级一等　　奖

中国工业与应用数学学会

2022

全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南大学民生学院

Mathematical Contest in Modeling

学生：李 叶、宋笑彤、梁春雷

荣获

指导老师：刘康

河南赛区 省级一等 奖

中国工业与应用数学学会


2025全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：焦楚婷、刘道、李婧远

荣获

指导老师：段中雨

河南赛区 省级二等 奖

中国工业与应用数学学会

2025全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：姬祥、伍佳欣、刘校幻 荣获

指导老师：李亚敏

河南赛区 省级二等 奖

中国工业与应用数学会

2025全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

Mathematical Contest in Modeling

学生：高婉秦、姚梦轩、常文哲 荣获

指导老师：栗文辉

河南赛区 省级二等 奖

中国工业与应用数学学会

2024全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：彭思念、刘若凡、尚立浩

荣获

指导老师：裴伟娟

河南赛区 省级二等奖 奖

中国工业与应用数学学会


2024全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：王榕浩、翟雪艳、陈炫晔

荣获

河南赛区 省级二等奖 奖

指导老师：栗文辉

中国工业与应用数学会

Mathematical Contest in Modeling

2023 全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

学生：李梦如、尹亚宁、孔璐璐

指导老师：裴伟娟

荣获

河南赛区 省级二等 奖

中国工业与应用数学会

Mathematical Contest in Modeling

2023全国大学生数学建模竞赛

获 奖 证 书

河南开封科技传媒学院

Mathematical Contest in Modeling

学生：郭斯杨、于 婧、马雪莲 荣获

指导老师：栗文辉

河南赛区 省级二等 奖

中国工业与应用数学学会

2022

全国大学生数学建模竞赛
获　奖　证　书

河南大学民生学院

学生：曹付强、王雨森、田　震

荣获

指导老师：刘康

河南赛区　省级二等　奖

Mathematical Contest in Modeling

中国工业与应用数学学会

6. 学生发表论文

基于双固定效应模型的智慧种植业发展区域异质性及影响因素研究
——以河南省为例

景硕，宋鸣涛

河南开封科技传媒学院，河南　开封

摘要：我国是农业生产大国，智慧种植技术的推广对保障国家粮食安全至关重要。基于 2012—2023 年河南省面板数据，运用双固定效应模型，对智慧种植业发展的区域异质性及其影响因素进行实证分析。研究表明，河南省智慧种植业发展水平呈现出显著的时间趋势特征，但其对农业经济韧性的提升作用存在复杂的传导路径。通过 ADF 检验、Granger 因果检验和相关性分析发现，智慧种植水平并非直接作用于总产量，而是主要通过提高单位面积产量间接贡献产出增长，存在显著的“智慧悖论”与中介效应。进一步回归分析表明，财政支持、播种面积仍是当前河南省农业产出的核心决定因素，但其直接增产效应有限，需要优化技术与农艺的结合。

关键词：智慧种植业；双固定效应模型；区域异质性；影响因素

分类号：F326.1

文章编号：2096-8515（2025）13-0032-03

随着信息技术与农业现代化的深度融合，智慧种植业成为增强农业经济韧性、促进农业可持续发展的重要方向。然而，在实践中，智慧种植业的发展效果呈现出明显的区域异质性，其推动力和政策响应在不同地区之间存在显著差异。现有研究表明，这种差异不仅缘于各地区资源禀赋和发展阶段的不同，还受到经济结构、政策环境与基础设施等多重因素的影响。因此，识别智慧种植业的区域差异与驱动因素，对制定差异化政策、推进农业现代化具有重要意义。

1　数据获取说明与数据可视化统计

选取 2012—2023 年河南省种植业相关指标数据作为研究对象，主要包括种植总产量、播种总面积、耕地面积、灌溉面积、农用机械动力、财政种植支出等指标。数据来源于《河南统计年鉴 2024》。

数据趋势与结构特征可视化分析显示：种植总产量呈波动上升趋势，从 2012 年的 20 584 万 t 上升至 2023 年的 23 381 万 t，但 2021 年出现异常下降，原因是受极端天气气候事件影响；耕地面积在 2019 年骤减 8.1%，从 815.8 万 hm^2 减至 751.4 万 hm^2，这与城镇化进程加速直接相关，但单位面积产量逆势提高，从 1.43 t/hm^2 提高至 1.59 t/hm^2，凸显了技术集约化对土地约束的突破作用；农用机械动力与灌溉面积呈显著正协同关系（r=0.87），但 2016 年机械动力骤降，从 11 710 万 kW 降至 9 859 万 kW，原因是处于设备更新换代期；财政种植支出与播种面积呈现出剪刀差，财政支出增长 92%，播种面积仅增长 2.5%，这表明政策重心从规模扩张转向技术赋能；智慧种植水平指数呈阶梯式跃升趋势，2015 年后增速加快，从 117.1 上升至 658.9，反映了农业机械化与智慧农业的协同发展。

2　模型构建

2.1　智慧种植模型

研究采用面板数据模型，通过 ADF（平稳性）检验、Granger 因果检验、相关性分析及双固定效应模型，系统识别变量关系与异质性影响。为保证研究方法的科学性和结论的可靠性，建立数学模型，以此构成河南

基金项目：2025 年河南省本科高校省级大学生创新创业计划训练项目“基于双固定效应模型的智慧种植业发展区域异质性及影响因素研究——以河南省为例”（S202513501004）；
河南开封科技传媒学院 2025 年度校级大学生创新性实验实践项目“河南省智慧种植业发展水平的区域差异及影响因素研究”（KCCXSYLX-2025-044）。

作者简介：景硕，本科，研究方向为农学。
宋鸣涛，本科，研究方向为经济学。

省智慧种植业发展水平影响效应实证分析的理论基础。智慧种植水平作为一个核心的解释变量，用于量化衡量河南省智慧种植业的发展程度，定义如下指标：

$$Smart_t=T_t\times I_t/100\ 000 \tag{1}$$

式中：$Smart_t$ 为智慧种植水平；T_t 为农业机械总动力；I_t 为灌溉面积；t 为年份。

$$M_t=\frac{P_t}{S_t} \tag{2}$$

式中：M_t 为单位面积产量；P_t 为种植总产量；S_t 为播种总面积；t 为年份。

2.2 双固定效应模型

为检验智慧种植业发展的影响因素，建立如下双固定效应模型：

$$y_{it}=\alpha+\beta\, x_{it}+\mu_i+\lambda_t+\varepsilon_{it} \tag{3}$$

式中：y_{it} 表示 i 地区 t 年的农业产出；x_{it} 为控制变量集合，包括播种面积、财政种植支出、劳动力投入等；μ_i 表示个体固定效应，用于控制不随时间变化的地区特征；λ_t 表示时间固定效应，用于控制时间趋势和共同冲击；ε_{it} 为随机误差项。通过 F 检验和 Hausman 检验确定应使用双固定效应模型，以控制不随时间变化的个体特征和不随个体变化的时间特征。

3 实证分析

3.1 ADF 检验

ADF 检验是计量经济学中用于判断时间序列数据是否具有平稳性的重要方法，其目的是检验时间序列中是否存在单位根。非平稳序列可能导致回归分析出现“伪回归”问题，因此采用 ADF 检验法对主要变量进行单位根检验。此检验方法的原理是通过检验自回归模型中滞后项系数是否显著不为零，判断序列是否具有平稳性。ADF 检验通过以下模型进行：

$$\Delta y_t=\alpha+\beta_t+\gamma y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}\delta_i\Delta y_{t-i}+\varepsilon_t \tag{4}$$

式中：y_t 为时间序列在 t 时刻的值；$\Delta y_t=y_t-y_{t-1}$ 为一阶差分；α 为常数项；β_t 为时间趋势项；γ 为单位根检验系数；y_{t-1} 为时间序列在 $t-1$ 时刻的值；p 为最优滞后阶数（通过 AIC/BIC 准则确定）；δ_i 为滞后差分项的系数；Δy_{t-i} 为时间序列滞后 i 期的一阶差分；ε_t 为随机误差项。

检验模型包含常数项与趋势项，最优滞后阶数依据 AIC 准则确定。原假设为存在单位根（序列非平稳），备择假设为序列平稳。若 ADF 统计量的绝对值大于临界值的绝对值，则拒绝原假设，认为序列平稳。

检验汇总结果（表 1）显示，种植总产量与播种总面积的一阶差分序列均在 1% 显著性水平下拒绝原假设（p 值分别为 0.000 2 和 0.000 0），表明两者为平稳序列；智慧种植水平与财政种植支出的原始序列及一阶差分序列均未通过检验（p 值均大于 0.05），说明存在单位根，为非平稳序列。因此，在后续建模中应对非平稳变量进行差分处理以满足平稳性要求，避免回归结果出现偏误。

3.2 Granger 因果检验

Granger 因果检验是计量经济学中用于判断变量间统计因果关系的重要方法，其核心逻辑并非直接验证“因 - 果”的物理机制，而是通过检验“变量过去值是否能显著提高对另一变量未来值的预测能力”来判断因果方向。其模型为双变量 VAR（p）：

$$Y_t=\alpha_1+\sum_{i=1}^{p}\beta_{1i}\,Y_{t-i}+\sum_{i=1}^{p}\gamma_{1i}X_{t-i}+\varepsilon_{1t} \tag{5}$$

$$X_t=\alpha_2+\sum_{i=1}^{p}\beta_{2i}\,Y_{t-i}+\sum_{i=1}^{p}\gamma_{2i}\,Y_{t-i}+\varepsilon_{2t} \tag{6}$$

该方法基于双变量 VAR 模型进行假设检验，假设检验内容为“X 不是 Y 的 Granger 原因”。通过 F 检验判断滞后项的显著性，若 p 值低于显著性水平，则拒绝“X 不是 Y 的 Granger 原因”的原假设，认为 X 对 Y 具有 Granger 因果影响。需要注意的是，Granger 因果本质上是统计预测关系，而非真实因果机制。

该研究对智慧种植水平与种植总产量进行了 Granger 因果检验（表 2）。结果表明，在滞后 2 期的情况下，“智慧种植水平不是种植总产量的 Granger 原因”的原假设被拒绝（p=0.099 3）。因此，智慧种植水平是种植总产量的单位 Granger 原因，这说明智慧种植技术的发展对农业产出具有前瞻性预测能力，但其影响并非通过直接作用实现，暗示存在间接传导路径。

表 2 Granger 因果检验结果

原假设	滞后 1 期 p 值	滞后 2 期 p 值	结论
智慧种植水平不是种植总产量的 Granger 原因	0.140 8	0.099 3	拒绝原假设
种植总产量不是智慧种植水平的 Granger 原因	0.844 6	0.932 0	接受原假设

表 1 平稳性检验汇总

变量	ADF 统计量	ADF 统计量（一阶差分）	原序列 p 值	一阶差分 p 值	结论
种植总产量	−3.363 6	−4.485 5	0.012 3	0.000 2	一阶平稳
智慧种植水平	−0.986 3	−1.320 2	0.758 2	0.619 9	不平稳
播种总面积	−3.549 8	−6.011 9	0.006 8	0.000 0	一阶平稳
财政种植支出	−1.749 6	−1.827 2	0.405 7	0.367 0	不平稳

3.3　相关性分析

相关性检验是检验变量之间线性关系强度和显著性的统计检验方法，常用于检验变量之间的联系及探究理论假设等场景，是进行变量之间联系初步检验的常用手段。通过计算皮尔逊相关系数（Pearson Correlation Coefficient）来衡量两个连续变量之间的线性关系，皮尔逊相关系数的取值范围为 [−1，1]，取的绝对值越大，相关性越明显。使用皮尔逊相关系数矩阵方法计算所有相关变量之间的系数，并筛选出重要变量之间的统计性关系（图 1）。

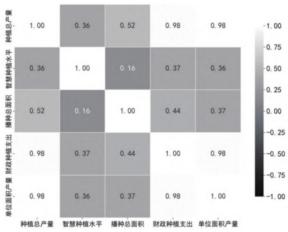


图 1　种植业变量相关系数矩阵

由图 1 可知，财政种植支出与种植总产量和单位面积产量间呈强正相关关系（r=0.98），播种总面积和种植总产量间呈中等正相关关系（r=0.52），智慧种植水平与种植产量和单位面积产量间呈弱负相关关系（r=−0.36）。

该结果与上述 Granger 因果结论不同，表明虽然智慧种植水平对产出存在预测作用，但与产出之间的简单线性关系并不紧密。这说明技术的投入对种植产量有正向作用，不过这一影响较小。

3.4　双固定效应模型回归分析

为控制不可观测个体的效应和时间的异质性，采用双固定效应模型进行参数估计。固定效应检验是面板数据模型中用于控制个体异质性和时间异质性的关键方法，它通过剥离不随时间变化的个体特征或不随个体变化的时间特征，增强模型估计的准确性。利用 F 检验比较混合回归（OLS）模型（不考虑个体效应）与个体固定效应模型的残差平方和（SSE），其回归分析结果汇总见表 3。

表 3　回归分析结果汇总

变量或参数	混合 OLS	时间固定效应
常数项	5 100.339 1	5 748.944 4
智慧种植水平	−0.012 7	−0.204 3
播种总面积	0.886 3	0.958 9
财政种植支出	4.755 0	3.474 4
时间趋势	—	84.310 3
样本量	12.000 0	12.000 0
R^2	0.963 6	0.969 5

由表 3 可知，时间固定效应模型的拟合优度更高（R^2=0.969 5）。智慧种植水平的系数显著为负（β=−0.2 043），呈现出“智慧悖论”，即技术投入并未直接带来产量提高，这可能源于技术应用中的资源配置效率问题或适应性滞后问题；播种总面积的系数为 0.958 9，在 1% 水平上显著，这表明土地规模仍是河南省农业产出的核心支撑因素；财政种植支出贡献显著（β=3.474 4），但低于混合 OLS 估计值（4.755 0），表明政策效果被时间趋势部分吸收；时间趋势项（β=84.310 3）反映了未被观测的技术进步（如品种改良）和管理优化对产出的年度边际贡献。

4　结论

研究表明，河南省智慧种植业发展呈现出显著的时间异质性，其技术贡献体现在通过提高单位面积产量间接拉动总产出的路径上。智慧种植水平虽能间接促进总产出，但直接效应为负，这可能是由于资源配置不合理或技术适应性不佳。同时，财政支持和播种规模仍是影响产出的主要因素，其边际效益已呈递减趋势，这凸显出单纯依赖要素投入的发展模式难以为继。

展望未来，随着 5G 与人工智能等技术在农业领域的应用日益深入，相关部门应制定推动智慧种植业发展的政策，着力促进技术与农艺深度融合，以增强智慧种植技术的区域适配性。后续研究应关注技术适配机制与小农户参与路径，为农业现代化提供差异化的政策支持。

参考文献

[1] 陈莉莉，彭继权.中国高标准农田建设政策对粮食生产能力的影响及其机制[J].资源科学, 2024, 46(1)：145-159.

[2] 郭娜，吕腾旭，宗昊龙.农业数字化对农业经济韧性的影响[J].中国生态农业学报(中英文), 2025, 33(1)：178-189.

[3] 张敏，黄英，周智.中国农业机械化的空间异质性与影响因素分析[J].农机化研究, 2016, 38(8)：1-5.

[4] 马震.智慧城市建设对经济高质量发展的影响研究：基于城市韧性视角的分析[J].华东经济管理, 2024, 38(3)：47- 57.

乡村振兴战略下小农户与现代农业发展有机衔接研究
——以河南省宁陵县为例

孙雪丽，李含笑

河南开封科技传媒学院，河南 开封

摘要：以河南省宁陵县为例，基于问卷调查结果，采用 SWOT 分析法剖析宁陵县小农户发展态势，深入分析其优势、劣势、机遇与威胁。根据分析结果提出宁陵县小农户与现代农业发展有机衔接的建议：健全农业社会化服务体系，推动技术引进和人才引进，完善农民专业合作社联合社，发挥区域和产业优势，加强农村基础设施建设。

关键词：小农户；现代农业；乡村振兴；宁陵县；SWOT 分析法

分类号：F325

文章编号：2096-8515（2024）08-0011-03

宁陵县通过构建现代农村人才培训体系，推动梨产业从劳动力投入型向技术驱动型转变；依托电商示范县优势，完善电商服务体系，巩固拓展脱贫攻坚成果；实施高标准农田建设、中低产田改造、耕地质量保护与提升等项目，提高农业综合生产能力。随着政策推动和技术进步，宁陵县小农户与现代农业的衔接有望进一步深化。

1 问卷调查

对宁陵县 401 名受访者进行问卷调查与访谈，共发放问卷 401 份，回收有效问卷 401 份，汇总调查结果如表 1 所示。

2 宁陵县小农户发展态势 SWOT 分析

2.1 优势（Strengths）

宁陵县小农户发展有利于提高农产品产量。宁陵县小麦每 667 m^2 产量超过 0.5 t，粮食年生产能力突破 6.2 亿 kg。除粮食外，畜牧业和酥梨生产也具有优势。生猪出栏 150 万头，禽类出栏 1 500 万羽，获评“河南省畜牧业高质量发展示范县”。酥梨年产量 65 万 t，年产值超 20 亿元，被誉为“中国酥梨之乡”。

表 1 调查结果 单位：%

问题	选项	占比
对小农户与现代农业发展有机衔接的了解程度	了解	19.70
	不太了解	61.10
	不了解	19.20
家庭中是否有人接受过农业生产专业知识或技能培训	是	26.18
	否	73.82
收获农作物的方式	人工	16.21
	机器	28.68
	人工与机器结合	55.11
农产品的销售方式（多选）	自己经营销售	37.66
	电商	24.19
	第三方收购	50.62
	政府帮扶	10.47
对小农户发展前景的看法	乐观	15.96
	一般	57.86
	悲观	26.18
是否愿意尝试应用农业生产的新技术或使用新品种	是	63.59
	否	36.41
对政府出台的相关帮扶政策的了解程度	非常了解	11.47
	较为了解	29.93
	一般	43.89
	不了解	14.71
是否愿意将自家产业进行规模化集中管理	愿意	58.85
	不愿意	41.15
是否有开展农业观光或农家乐等农业旅游项目	是	33.42
	否	66.58

基金项目：河南开封科技传媒学院 2024 年度校级大学生创新性实验实践项目“乡村振兴战略下小农户与现代农业发展有机衔接研究——以宁陵县为例”（KCCXSYLX-2024-041）。

作者简介：孙雪丽，女，本科在读，研究方向为经济学。

2.2 劣势（Weaknesses）

2.2.1 非系统化管理

系统化的管理模式对提高农业生产效率与质量至关重要，也是实现农民增收和农业现代化的关键。宁陵县农业系统化管理存在不足，41.15% 的受访者不愿被纳入规模化集中管理，管理方法与产量水平参差不齐，缺乏长期规划与宏观布局，限制了农产品产量提高与小农户发展，阻碍了现代农业发展。农户决策缺乏科学依据，风险加剧，难以调动其种植积极性。在销售方面，37.66% 的受访者选择“自己经营销售”，但受文化水平限制，难以精准把握市场进行定价，限制了小农户发展。

2.2.2 生产技术落后

先进农业生产技术有助于提高生产效率与增加农民收入，减轻农民负担，改善农民生活。农作物耕种收综合机械化为推动农业现代化进程和实施乡村振兴战略提供了有力支撑。但宁陵县农业生产面临技术瓶颈，当地纯机械化普及率低，多数农户依赖人工与机械结合，且仅 26.18% 的受访者接受过专业培训，这制约了农业生产效率的提高。同时，36.41% 的受访者对新技术和新品种的接纳程度不高，阻碍了农业机械化普及与农业现代化进程。因此，加强农业机械化推广，提高农户对新技术的接受度，对提高农业生产效率至关重要。

2.2.3 对现代农业发展前景存在认知偏差

农业现代化已成必然趋势，准确理解其前景是推进农业现代化的关键。农村青年群体缺失与城乡居民对现代农业前景的看法存在差异，不利于推动农业现代化进程。57.86% 的受访者认为小农户前景一般，26.18% 的受访者持悲观态度。普遍的消极情绪影响了农户的积极性，导致年轻人离开农业领域，加剧了农业人口老龄化，小农户发展滞后。同时，错误理解现代农业发展会致使投资者错失机遇，造成农业创新和技术改进资金不足。此外，乡村青年精英的缺失给小农户的组织化带来了困难，同时也给农业现代化带来了极大挑战。

2.2.4 对相关政策缺乏了解

小农户在我国农业中占据重要地位。政府出台多项惠农政策，如补贴种粮大户和农民培训，但政策的宣传效果和小农户的理解情况会影响政策的实施效果。43.89% 的受访者仅一般了解政策，14.71% 的受访者完全不了解。这表明宁陵县在政策普及的深度和宣传的广度上有待提高，限制了小农户对农业发展的认知，影响了其生产动力。61.10% 的受访者对小农户与现代农业发展有机衔接表示“不太了解”，19.20% 的受访者表示“不了解”。这表明小农户对现代农业缺乏了解，阻碍了小农户应用新技术和采纳新理念，不利于促进小农户与现代农业发展有机衔接相关工作的开展，影响了农村产业的综合发展和小农户与现代农业的接轨。

2.2.5 自然资源待开发

宁陵县农业资源丰富，支持多元化发展。66.58% 的受访者未曾涉足农业观光或农家乐等农业旅游项目，说明小农户未充分挖掘农业资源潜在的经济效益和社会效益，也不了解小型、高效的农业经营模式。此外，宁陵县区域优势发挥不足，交通设施滞后，限制了其与外界的经济交流，制约了宁陵县的整体发展。

2.3 机遇（Opportunities）

2.3.1 产品销售渠道多样化

宁陵县农产品销售包括农户直销和第三方收购。随着互联网发展，越来越多的农户利用网络平台销售产品。24.19% 的受访者选择电商平台或网络渠道销售。宁陵酥梨产品受老年人和儿童喜爱，提高了宁陵县农产品的市场知名度，为拓宽销售渠道提供了新机遇。

2.3.2 特色产业活动增加

33.42% 的受访者参与过农业旅游项目。目前，农业旅游已成为推动当地经济发展的关键。梨花节不仅是庆祝，还是廉政文化教育平台，通过戏曲、书画等活动传播廉政文化。宁陵县还举办古庙会、节日庆典等活动，增加农民收入，促进经济繁荣。宁陵县成功将农业与旅游结合，开拓了农业发展新路径，并为保护和传承地方文化提供了有力支持。

2.4 威胁（Threats）

在农业现代化进程中，宁陵县农产品面临激烈的市场竞争。尽管有“金顶”酥梨等农产品品牌，但整体品牌影响力不足，影响了其产品的市场销售。与先进地区相比，宁陵县农业生产技术落后，影响其农产品品质和生产成本。同时，农产品安全受病虫害威胁，影响农产品产量，损害品牌形象，削弱了农产品的市场竞争力。

3 宁陵县小农户与现代农业发展有机衔接的建议

3.1 健全农业社会化服务体系

宁陵县可以采取以下四种措施健全农业社会化服

务体系。第一，推动农业社会化服务，以龙头企业为核心，村社共建创新模式，强化小农户与服务体系之间的联系，巩固基层合作社发展基础。第二，加强信息技术服务平台建设，为小农户提供有针对性的市场信息分析、产中农业技术指导和产后农产品销售对接的全产业链服务，实现供需双方的线上对接与线下服务。第三，发挥龙头企业的带动作用，设立合作发展基金，推进产销融合，创新体制机制改革；基于“公司 + 合作社 + 农户”模式发展订单农业，地方政府搭建互联网农村电商平台，拓展在线销售。第四，为小农户提供金融和保险服务，增强资金和风险保障，避免小农户因政策变动和市场波动而中断生产，甚至破产；增加农村基建投入，引进“互联网 +”技术，实现农村网络和物流全覆盖，为小农户提供更优质的金融服务。

3.2 推动技术引进和人才引进

宁陵县面临技术落后、小农户能力不足、青年组织化程度低与留守等问题。政府应发挥主导作用，降低科技门槛，在农田生产中应用农业科技，提高农业生产效率与产量，延长产业链，优化资源配置。同时，加强对基层农业服务人员的管理，培训农业技术推广人员，搭建教育培训平台，成立专家服务站，提高小农户素养与技能。搭建网格化对外平台，增加宣传服务要素，提高品牌影响力，提高农产品在市场中的占有率，增加小农户收入。确保政策精准惠及小农户，保证其有效性和针对性；优化人才队伍结构，加强交流合作，实施留乡优惠政策，建立管理制度和激励机制，吸引外地人才落地，促进当地人才回归。

3.3 完善农民专业合作社联合社

在推动宁陵县小农户与现代农业发展衔接的过程中，需要重视农民专业合作社联合社的建设。首先，转变小农户观念，增强其能力、意识与内在动力，激发其主观能动性。其次，提高小农户合作水平，推动合作社发展产业联合体，完善并执行章程制度，健全组织架构，规范财务管理和盈余分配等关键环节。妥善处理适度规模与效率之间的关系，展现各产业类别合作社的独特优势，有针对性地解决单一农民专业合作社规模和产业链单一等问题。最后，政府要加强对联合社内部成员的监督，尊重联合社在市场中的自主地位，加大农户与联合社农业科技手段的培育力度。

3.4 发挥区域和产业优势

宁陵县地理位置优越，但交通设施尚待完善，缺乏高铁站点。宁陵县政府应依托其地理优势，精心规划县域发展，加强交通基础设施建设，科学布局交通节点，推进与外界经济的互联互通，推动当地经济繁荣发展。同时，宁陵县文化底蕴深厚，政府应利用文化资源与产业优势，将农业与旅游结合，打造特色旅游地，吸引外资，带动当地其他产业共同进步，增加居民收入。例如：举办梨花节推广梨膏糖，提高农产品品牌影响力和农产品的市场价值。

3.5 加强农村基础设施建设

农村基础设施涵盖农田水利、农产品流通体系和气象设施。小农户易受气候影响，控制难度大。宁陵县政府应加强气象设施建设，提高预测的准确性，为小农户提供及时准确的气象信息，减少损失；建立灾后反馈机制，援助受灾民众。利用高标准农田建设项目，完善农田水利设施建设，因地制宜实现节水灌溉，提高机械化作业水平和防灾减灾能力，降低人工成本；加强农产品流通设施建设，提高流通效率，简化中间环节，降低损耗，增加农民收入；改善交通，促进原料输入与农产品输出，加快农业现代化步伐。

4 结束语

宁陵县在农产品产量上占有优势，但仍存在非系统化管理、生产技术落后、对农业发展前景存在认知偏差、对相关政策缺乏了解、自然资源待开发等劣势，根据调查反馈，产品销售渠道多样化和当地特色产业活动举办次数增加是其发展机遇，但还面临市场竞争加剧的威胁。因此，宁陵县应健全农业社会化服务体系、推动技术和人才引进、完善农民专业合作社联合社等，促进小农户与现代农业发展有机衔接。

参考文献

[1] 冯路. 大国小农背景下小农户组织化困境及对策研究[D]. 长春：吉林农业大学，2023.

[2] 王亓文，杜宝玲. 乡村振兴战略下新型农业经营主体推动小农户与现代农业发展有机衔接研究：基于SWOT模型分析[J]. 安徽农业科学，2023，51(4)：253-255+275.

[3] 马小龙，闫莺. 乡村振兴战略下小农户与现代农业发展有机衔接路径探讨[J]. 农村科学实验，2019(5)：91-93.

乡村振兴背景下汤阴县农业产业化的金融支持问题研究

蔡　瑞

河南开封科技传媒学院，河南 开封 475000

摘要："三农"问题一直是我国长期重视的问题。为了更好地解决此问题，缩小城乡发展差异，促进乡村经济发展，我国提出并开始实施了乡村振兴战略。而产业振兴是乡村振兴的重中之重，也是实际工作的切入点。推动乡村农业产业化发展，金融是重要保障和有力支撑。以河南省汤阴县为例，对汤阴县农业产业化进行调研与思考，并总结金融支持方面的问题。通过问卷调查的方式，从当地农村实际情况出发，重点分析了农村金融体系建设过程中存在的问题，提出合理化建议，以推动农村地区的农业产业化发展。

关键词：金融；农业；产业化；金融支持

中图分类号：F327；F832.7　　　　DOI：10.3969/j.issn.2097－065X.2024.01.033

0　引言

农业不仅是国民经济建设与经济发展的基础，也是一切社会活动的基础，更是满足人类基本需求的依托。农业产业化是传统农业和现代农业相结合，通过引入先进的技术和管理方式，促进农业整体发展，从而实现农业科技化、效率化、产量化的发展。农业产业化的核心目标是提高农业生产效率和经济效益，促进农民收入增长，实现农村经济的转型升级。农业产业化推动现代农业发展，产业化的发展促进了传统农业向现代化农业的转型升级。但在实现农业产业化的过程中，不仅需要科学的技术指导，还需要金融支持，以满足其在发展进程中对大量资金的需求。在金融支持方面，需要农业生产资金支持，购买先进设备和技术；需要农产品加工和流通资金支持，并减少农产品运输成本；需要农业科技创新资金支持，促进农业技术发展；需要农业保险和风险管理资金支持，降低农产品企业发展的风险。本次调查的目的是在乡村振兴战略背景下，结合农村发展实际，促进农村金融与农村产业融合发展[1-2]。

1　当地农业产业化的金融支持现状分析

本次通过走访汤阴县并对当地居民进行问卷调查及面对面访谈，共发布问卷 230 份、收回问卷 230 份、有效问卷 230 份。下文将根据调查结果对汤阴县金融环境现状、金融机构现状以及农业产业化现状进行分析。

基金项目：河南开封科技传媒学院 2023 年度校级大学生创新性实验实践项目（KCCXSYLX－2023－063）

1.1　汤阴县金融环境

调查结果显示，有 12.17％的人认为当地的金融生态环境、信用质量很好，37.83％的人认为较好，39.57％的人认为一般，10.43％的人认为较差（图 1）。调查发现，乡镇企业和农户的诚信意识较淡薄，其行为为缺乏监督，导致恶意避债、银行不良贷款的现象屡见不鲜。再加上农村地区缺乏担保体系，很难保证贷款的安全性，因此无法满足建设良好金融生态环境所需的各种条件。政府部门对金融生态环境建设的支持力度不够，相应的支持和保障机制不够健全。农村金融的法制法规建设滞后，尤其是在对新型金融业务的监管方面，相关的法律法规还存在空白和不足，不能保证农村金融机构的资产安全，这就导致在为农村提供资金的过程中，金融机构的积极性和主动性大大降低。农村债务人的财产构成不利于司法执行，其土地承包权、农机具、养殖大棚、房屋缺少配套的产权登记、等级评估、流通转让制度和市场，导致司法执行难度大。相关金融机构未完善农户和农村信贷的信息和数据的途径，不了解农户和农企的信用状况，为其提供金融服务的难度增大。

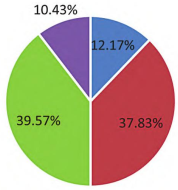


图 1　当地金融生态环境，信用环境评价

1.2　汤阴县金融机构

首先是农村金融产品类型单一，无法满足农民个性化需求。从图2中的调查结果显示，其中63.48%的人倾向于去银行或其他金融机构办理储蓄业务，19.13%的人办理汇款转账业务，11.3%的人办理生产性贷款，6.09%的人办理消费信贷业务。农村金融产品的大多集中在存款、贷款、保险等领域，缺乏创新性金融产品以满足农村的实际需求。其次是金融机构的网点大量撤并，金融服务覆盖率较低，不能满足农村经济发展需要。从图3中的调查结果显示，有16.09%的当地居民生活所在地的银行或金融机构的数量只有1，22.17%的居民所在地的银行或金融机构的数量有2，56.52%的当地居民所在地的银行或金融机构的数量在3以上，5.22%的居民所在地没有银行或金融机构。汤阴县金融网点大量撤并，一些偏远地区的农户办理银行业务十分困难，无法及时得到便捷的服务。农村金融网点供给不足，农户对资金的大量需求滋生了利率高的民间借贷等缺少法律法规约束的机构，出现了贷款难、贷款贵等问题，严重制约了汤阴县农村经济的发展。农村金融服务覆盖率低，向农村提供贷款的农村正规金融机构主要为农村的中小企业和专业大户服务，很难覆盖到普通农户。

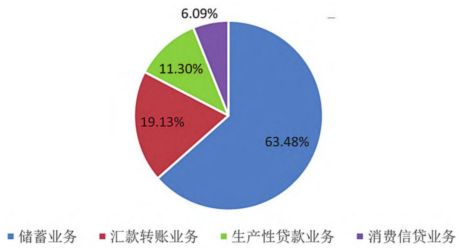


图2　当地居民去银行办理业务种类

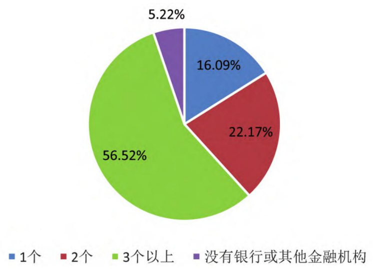


图3　所在地银行或金融机构的数量

1.3　汤阴县农业产业化

汤阴县高度重视农产品加工，通过支持重点企业做大做强，促进农产品由初级加工向精深加工转变，扩大产业规模，发展高效农业，实施“品牌化”战略，吸引更多的农业龙头投资当地的农业。汤阴县农业产业化对金融支持有着明显的需求，主要体现在以下几个方面：(1)农业产业化需要大量的资金用于引进先进的农业技术。如农田灌溉系统、种植设备和农业机械等都需要资金支持。(2)农业产业化涉及到大规模的农作物种植和养殖，需要购买大量的农业原材料，金融支持为其提供资金支持以确保原材料的及时采购。(3)农业产业化需要建设农田、温室大棚、养殖场等基础设施，需要资金投入，金融机构可以提供贷款或融资支持，帮助农业企业和农民改善生产条件。(4)农业产业化需要建立拓展销售渠道，推广农产品。金融支持可以提供相关的贷款和融资，以支持市场营销、品牌建设、物流配送等活动。

2　汤阴县农业产业化金融支持存在的问题及原因

2.1　农村金融体系发展不够完善

随着经济的不断发展，农村的金融机构也在不断地改革，但农村的金融体系仍然存在许多问题。首先是金融机构数量不足，汤阴县农村金融机构数量总体上偏少，特别是农村商业银行和农村信用社数量不足，无法满足农村经济发展和农民生产生活所需的金融服务。其次是金融服务水平低下，部分农村金融机构服务意识淡薄，服务态度差，服务价格高，难以吸引农民群众使用金融服务。其次是农村金融体系发展不完善，农民的信息获取渠道有限。农民缺乏获得市场行情、农业技术和政策动态的渠道，难以做出明智的金融和产业决策[3]。最后是农村金融监管力度不够，部分地方政府对农村金融监管的重视程度不够，金融监管部门对农村金融机构的监管力度不够，导致一些农村金融机构违规经营，损害了农民群众的利益。

2.2　农业主体信贷需求不足

一是汤阴县的农村信贷需求难以满足供给。相关金融机构应出台政策，如简化服务程序、放宽信贷门槛等。在一定程度上解决部分问题，但是没有根本满足农村信贷需求。二是金融机构对农村信贷的支持力度不够，农业主体在农业发展前期得不到信贷方面的支持，耽误了农业主体的生产。三是投资农业风险较大。因为农业发展需要大量资金，但是农业发展速度较慢，回报率低，使用资金量大。因

此，金融机构在选择农业投资问题上会存在顾虑，导致农村信贷资金供给不足。

2.3 农村金融产品缺乏创新

农村经济发展落后，区域发展不平衡，资金回笼较低，没有足够的资金投入到产品创新中，导致产品结构单一。农村金融产品创新动力不足，在农村发展具有区域性的特点，没有太多的金融市场，产品创新成本较高，农民素质水平相对低下，创新的产品在农村大范围内推广难度大。不能发挥出当地农产品的特色，缺乏技术创新能力，也没有引进新技术，就不能很好地促进产品的创新。农村金融机构缺少吸引人才的能力，不能集中精力更好地投入到产品的创新中。农村金融产品在种类、服务质量等方面缺乏差异化，很难满足人们对物质美好生活的需求，并且使得一些农村金融产品无法和市场上其他金融产品相竞争，难以取得良好的市场反响。

2.4 农业保险发展缓慢

首先是政府在农业保险立法方面的支持力度不足，农业保险的发展一直受到政策的制约，政府对于农业保险的投入力度和政策支持不够，这让当地农业保险的发展遇到了瓶颈。同时，国家在农村基础设施建设上的落后，也间接地影响了农业保险的推广与应用。其次是农民风险意识不足。由于文化程度和生活环境的差异，许多农民对于农业保险并不了解，并不会去购买。农民还没有形成抗风险的观念，并没有将农业保险看作一项必要的农业生产成本，导致农业保险难以普及。再次是农险产品的缺乏。汤阴县的农业保险产品过于单一，缺乏农业生产全过程管理和风险管控产品，这也导致了农业保险的应用受限制。最后是保险机构的不完善。一些保险机构的营销方式不够灵活，服务水平也不太到位，这导致很多农民对于保险机构的信任程度较低。农民在获得保险理赔时难以得到有效的协助和保障，也进一步打击了农业保险的应用[4]。

3 汤阴县农业产业化金融支持的可行性建议

3.1 完善农村金融体系

汤阴县政府应鼓励农村中小机构向汤阴县发展网点，加快自动取款机的全面覆盖。拓宽金融服务渠道大力鼓励大中型企业商业银行开展农村金融服务，利用网络、移动设备（如手机等）、科技在偏远地区开展有效的金融服务，减轻农户的负担。加强农村信息服务基础设施建设，提升农民获取农业信息的能力，包括市场行情、技术指导和政策信息等。加强农村金融监管，制定相关法律法规，积极推动信用数据的完善，在各金融部门之前进行信用信息共享，建立良好的农村金融服务环境。涉农机构应优先向乡村振兴地区配置低成本资金贷款，在乡村交通、通信、卫生等方面提供金融支持，利用金融科技降低农户贷款成本，通过开发新的渠道来拓宽投资机会。

3.2 加大信贷支持力度

金融机构可以根据农户的生产经营规模和信用状况，提高其信贷额度，让农户有更多的资金支持农业生产和经营，提高贷款审批效率。扩大信贷支农贷款范围，可以将信贷支农贷款的范围从传统的农业生产贷款拓展到农村发展和产业升级贷款，以满足农村发展的多元化需求[5]。结合农村实际，推出创新性信贷支农贷款产品，金融机构可以根据农户的个人需求，针对不同的信贷支农贷款需求设计不同的产品，提供更灵活多样的融资方式和担保方式，扩大农民和涉农企业的选择面，突破旧有的传统信贷体系。保证农业资金的合理利用，建立科学的金融服务体系，满足农民和涉农企业由于能力产生的不同需求，合理灵活安排还款时间。加强信贷支农贷款宣传，银行可以通过各种渠道加大信贷支农贷款产品的宣传力度，向农户普及信贷支农贷款的政策、优惠利率等，鼓励更多的农户使用信贷支农贷款。政府可以通过建立完善的风险管理体系，对信贷支农贷款进行有效监管和风险控制，保证农户获得可持续性的融资支持。

3.3 创新农村金融产品和服务

针对农村金融产品资金供应不足的问题，应根据农村实际需求创新推出对应的金融产品，为当地农户提供更多金融支持。为提高农村金融市场的服务水平，金融机构需加强农户的金融教育，提高农户的金融知识和自我保护能力。合理规划资金投入，科学合理地使用资源，加大对产品技术的投入，推动产品在市场竞争，促进产品的创新。对农村金融基础设施的建设要更加全面，健全完善的信用体系，可以帮助农民、商业机构等分担风险。针对创新动力不足等问题，应该加强创新，吸引人才，大力推动创新金融业务，如基于支付宝的移动金融、互联网金融等业务。应注重发展当地农村产品特色，搞好产品质量和产品服务，可利用电商等平台带动产品促销，加大产品的宣传力度。针对农村不同的需求特点，开发差异明显、适应性强的金融产品，以此提高市场竞争力。

3.4 加速推进农业担保和保险业务

政府应制定明确的农业保险政策，包括政策扶

持和补贴措施，以增强农民参与农业保险的积极性，降低担保服务门槛，鼓励多渠道筹集资金，分散和降低农业风险。同时完善农村信用体系，为金融公司提供一个良好的信用环境。完善农业保险产品设计，农业保险产品应覆盖不同的农作物、养殖业和渔业等农业领域，以满足农民的不同需求。政府救济和保险市场应该通过加强政策的支持，不断完善农业保险机构体系，提供多样化、个性化的农险产品，加强保险知识宣传，推进农业保险的普及，提高农民的风险意识，鼓励发展专业的农业保险机构，并完善农业保险市场的竞争机制，推进农业保险的普及[6]。

4 结语

在国家倡导共同富裕理念下，三农是需要重点攻坚的领域，而实现农业产业化是改变传统农业弱势地位和实现农民增收致富的重要途径，金融则是助力乡村产业发展、实现乡村振兴的重要手段。农业产业化发展与金融支持之间是协同发展相互促进的关系。一方面，农业产业化从金融机构获得信贷支持，有效提高了农业产业化的发展速度。另一方面，农业产业化的发展也会促进农村金融内部运行机制的完善与创新，优化农村资源的有效配置。所以在此背景下，必须结合农业产业化发展现状对农村金融产品进行合理的完善与创新，加大对涉农领域的资源投入，加大金融支农力度，持续开发出更多的数字化、普适化、标准化的金融产品，来服务更多的新型农业经营主体，满足更多农业金融的需求，促进农业、农村经济的发展，带动农民增收和乡村振兴。

参考文献：

[1] 黄小莉.金融支持农业产业化的关系研究：以德阳市为例[D].雅安：四川农业大学，2013.

[2] 刘嘉庆.吉林省农业产业化发展的金融支持研究[D].长春：吉林大学，2017.

[3] 龙荣，彭珊，张佳丽，等.农村金融支持对农村经济增长的影响研究：以江西省为例[J].金融与经济，2018(1)：86-89.

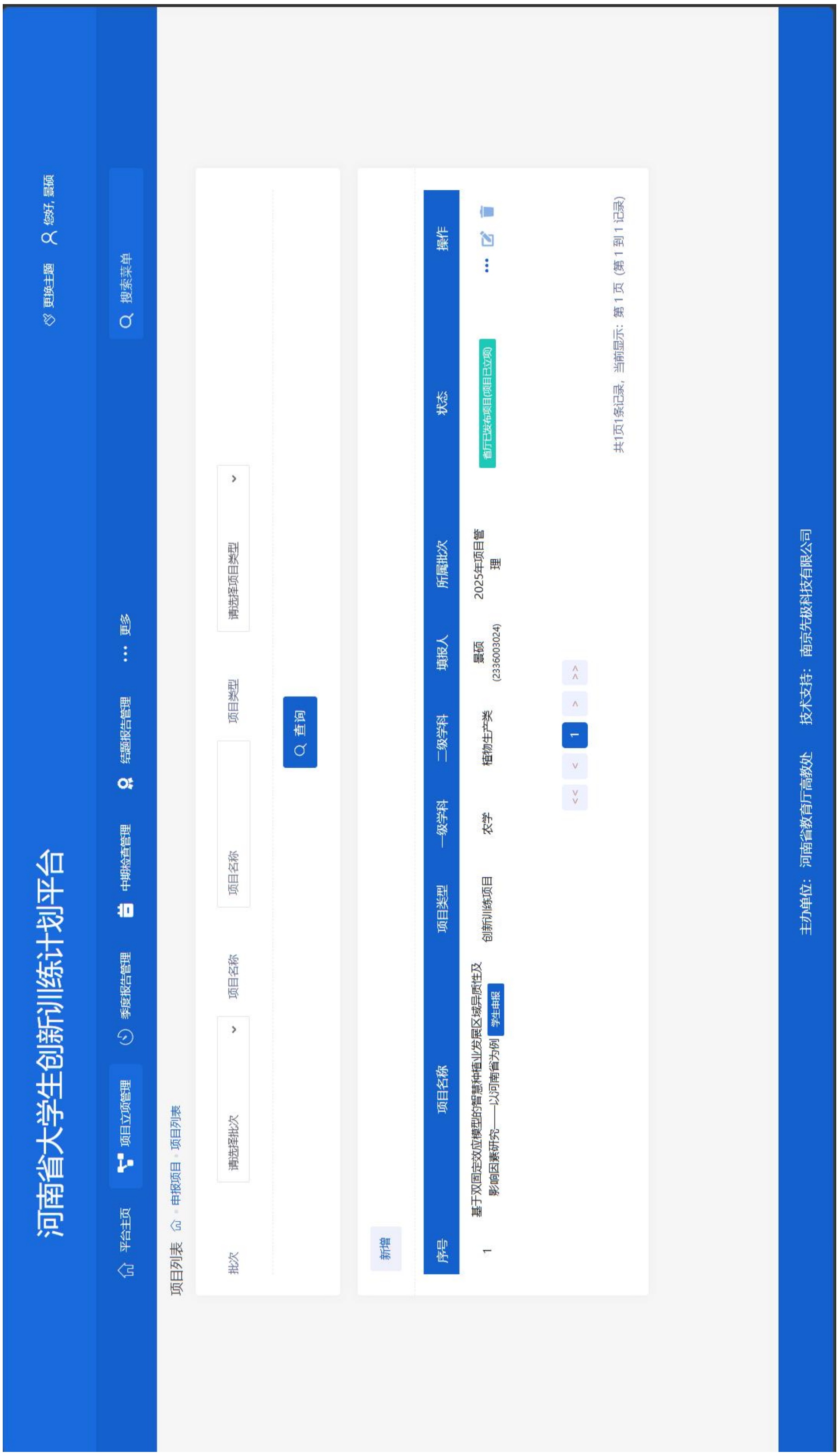
[4] 杨菊.重庆市金融支持乡村产业发展的实证研究[D].兰州：兰州大学，2019.

[5] 寇江.乡村振兴战略中金融支持与现代农业发展关系实证[J].辽宁农业科学，2018(6)：35-39.

[6] 慕慧娟，崔巍平.金融服务助力乡村振兴[J].西南金融，2021(4)：29-40.

作者简介：蔡　瑞，女，1999年生。研究方向为经济学。

7. 河南省大学生创新训练计划立项



第六部分 省级及以上新闻媒体报道

1.河南开封科技传媒学院举行教师上课暨辅导员达标考核活动

https://5g.dahe.cn/edu/202302201190641

2.河南开封科技传媒学院：着力构建具有强大思政引领力的育人体系

http://m.jyt.henan.gov.cn/2026/02-09/3325068.html

1.河南开封科技传媒学院举行教师上课暨辅导员达标考核活动

大河网
dahe.cn

河南开封科技传媒学院举行教师上课暨辅导员达标考核活动

2023-02-20　大河网

大河网讯 教学技能‘一人一招’锤炼得怎么样？学生就业实践能力培养有哪些新进展？考研真题研究了几套？开学第一课上得出彩吗？这些都是2月18日，19日河南开封科技传媒学院教师上课达标考核暨辅导员达标考核现场的考题。来自9个二级学院不同学科领域的25名教师和6名辅导员接受教学能力和综合素质的检验。

教师上课达标考核分为材料审核、实验（实践）考核、课程综述、讲课考核四个阶段。在材料审核阶段，教师递交了课程综述PPT、教材及参考书、教学大纲、实验大纲等9大项32小项内容；课程综述、讲课考核和实验（实践）考核阶段，教师随机抽取综述或讲课地点、章节，并要在综述或讲述完毕后接受专家的点评、提问。

辅导员达标考核设置工作综述、模拟班会、案例分析和简答等环节。选题充分结合国家政策、学校发展需要和学生工作特点，涵盖了开学第一课、学校小学期安排、考研动员会、树立正确就业观、心理疏导、安全教育等内容。

上课达标考核和辅导员达标考核的总设计师，科传学院校长郑逢斌指出，教师上课达标考核和辅导员达标考核是提高师资队伍及辅导员综合素质的重要抓手，也是培养应用型人才的重要途径。一人一招，课程思政，小学期实践教学，考研真题讲解，辅导员随抽班会等考核内容都充分彰显了学校特色。

“准备考核的过程很辛苦，但是教学水平有了质的飞跃。从站上讲台到站稳讲台，考核给了我信心和勇气。现在回头看，一切都值得。”会计学专业教师张亚丽说。

据悉，教师上课达标考核活动开展以来，已有三百余名教师登上舞台，展示风采。（刘昊/文 连鹏飞/图）

编辑:李瑞　　审核： 阎乃川

2.河南开封科技传媒学院：着力构建具有强大思政引领力的育人体系

河南省教育厅
The Education Department Henan Province

教育动态 政务公开 政务服务 交流互动 专题子站

首页 > 教育动态 > 高校动态 >正文

河南开封科技传媒学院：着力构建具有强大思政引领力的育人体系

教育厅新闻办 发布时间：2026-02-09 17:03:31.0

河南开封科技传媒学院深入贯彻落实教育强国战略要求，着力构建具有强大思政引领力的育人体系。

强化课程育人：构建思政课程与课程思政协同推进机制

思政课是学校思想政治教育的主渠道。学校党委高度重视思政课建设，定期召开专题会议研究思政课建设，将其作为“一把手工程”统筹推进。提升思政课引领力关键在教师，通过实施“强师铸魂”计划，完善常态化研修与教学诊断机制，着力提升教师理论素养与教学能力，打造具有吸引力的思政“金课”。坚持以改革创新驱动思政课建设，连续举办六届“薪火”思想政治理论课实践教学成果展，形成特色育人品牌。同时，推动思政课程与数智技术深度融合，鼓励师生开发思政主题融媒体作品并引入课堂教学，增强思政教育的时代感与亲和力。

推进课程思政与思政课程同向同行。自2019年开始实施教师上课达标考核活动，将课程思政作为核心评价指标，教师要在考核中清晰地展示并讲解相关内容。迄今已开展13次，覆盖全校教师，确保思政元素贯穿各学科教学，不断提升思政课程与课程思政协同育人的引领力。在2025年河南省高校思政课优秀课程资源评选中，学校获特等奖一项、一等奖两项、二等奖两项，涵盖示范“金课”、优秀案例及优秀实践教学资源等多个类别。

拓展实践育人：探索思政小课堂与社会大课堂深度融合

学校将焦裕禄精神、穆青精神等地域文化优势转化为育人资源，通过成立全国首家焦裕禄精神青年学校、与焦裕禄干部学院共建思政教育基地、承办穆青主题展及复现人民记者穆青的书房等举措，将焦裕禄精神、穆青精神深度融入育人全过程，实现了专业教育与思政引领的有机融合。2025年，《知行合一，四维发力——穆青精神融入大学生思想政治教育实践》获省高校学生工作成果一等奖；原创节目《精神的力量》在河南省秋季开学思政第一课上展演，并获批省高校思想政治工作精品建设项目。

组织学生走进社会大课堂，建立实践教学体系。与开封市博物馆、开封禹王台公园等单位共建“大思政课”实践教学基地，安排不同专业学生结合所学特长到开封各区县实地考察与创作实践，使学生在红色文化与历史传承中筑牢信仰根基，实现知行合一。扎实做好暑期“三下乡”等社会实践活动，2025年共组织近千名师生深入基层开展政策宣讲、乡村振兴等活动。全年累计组织志愿服务活动29万余人次，服务时长近14万小时。当思政课有了“源头活水”，学生的成长成才自然就有了力量之源。

创新网络育人：以融媒体建设赋能大学生思想政治教育

面对互联网时代思政教育新态势，学校以融媒体建设为抓手，积极探索网络思想政治教育的新形式、新举措。坚持“学生在哪里，宣传阵地就在哪里”的工作理念，构建了涵盖十余个主流平台、103个账号的融媒体矩阵，融入了青年大学生思想圈、学习圈、生活圈，形成具有时代热度、人文温度与思想深度、情感厚度的融媒体网络育人阵地，让手机上的“小屏幕”变成网络育人“大课堂”。

学校创新融媒体建设举措，成立二级学院融媒体中心，实行量化考核积分，激发创作优秀作品的内生动力。融媒体作品注重强化思想引领，将时代大主题转化为学生关注的“小话题”。通过开设“名师访谈”“考研之星”“国奖风采”等专题，推出了一系列有深度、有温度的作品。学校网络育人工作入群入圈，育人成效正加速显现。近两年，学校网络育人作品在各类比赛中屡获奖项。

深化日常育人：打造浸润式思想政治教育生态

学校将日常思想政治教育作为育人重要阵地，着力构建多层次、立体化、浸润式的教育生态。通过形式多样的专题活动、仪式典礼及榜样选树，对学生进行情感激发与价值塑造；依托学科专业优势，培育形成了“一院一品”校园文化项目十余个，让学生沉浸在高雅的校园文化中；建成“中国共产党人精神谱系”主题沉浸式教育长廊，2万余名学生实地参观学习，汲取奋进力量；常态化开展“廉润心田，清风科传”主题活动，营造风清气正的校园文化氛围，将其与理想信念教育、道德品行教育等紧密结合，共同引导学生扣好人生的“第一粒扣子”。

以“一站式”学生社区为载体，推动教育管理服务延伸至宿舍生活圈。充分发挥辅导员谈心谈话、党团组织

建设、学生事务管理中的教育导向作用，将思政引领贯穿于学生学习成长、创新创业、职业规划的全过程，使思想引领在生活场景中具象化、日常化，不断引导学生将个人理想融入国家发展进程。近两年，学生在全国各类赛事中获得荣誉千余项，充分展现了日常思想政治教育的扎实成效。

（河南开封科技传媒学院 供稿）

第七部分 教材类成果

1.教材：数学分析（一二三）（第二版）ISBN ：9787030772572

2.教材：高等数学（全二册）ISBN ：9787030733238

3.教材：数学分析（一二三）（第一版）ISBN ：9787030576002

1.教材：数学分析（一二三）（第二版）ISBN ：9787030772572

内 容 简 介

本书是河南省"十四五"普通高等教育规划教材，全书共三册，按三个学期设置教学，介绍了数学分析的基本内容.

第一册内容主要包括数列的极限、函数的极限、函数连续性、函数的导数与微分、函数的微分中值定理、泰勒公式和洛必达法则. 第二册内容主要包括不定积分、定积分、广义积分、数项级数、函数项级数、幂级数和傅里叶级数. 第三册内容主要包括多元函数的极限和连续、多元函数的微分学、含参量积分、多元函数的积分学.

本书在内容上，涵盖了本课程的所有教学内容，个别地方有所加强；在编排体系上，在定理和证明、例题和求解之间增加了结构分析环节，展现了思路形成和方法设计的过程，突出了教学中理性分析的特征；在题目设计上，增加了例题和课后习题的难度，增加了结构分析的题型，突出分析和解决问题的培养和训练.

本书可供高等院校数学及其相关专业选用教材，也可作为优秀学生的自学教材，同时也是一套青年教师教学使用的非常有益的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析：全3册/崔国忠，郭从洲，王耀革主编. —2版. —北京：科学出版社，2023.12

ISBN 978-7-03-077257-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔… ②郭… ③王… Ⅲ. ① 数学分析 Ⅳ. ①O17

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第238958号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤／责任校对：杨聪敏

责任印制：师艳茹／封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京盛通数码印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年7月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2023年12月第 二 版 印张：56 1/2

2023年12月第六次印刷 字数：1 139 000

定价：198.00元（全3册）

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

目　　录

目　录

第一版前言
——基于结构分析的教材与课程设计

"数学分析"是数学及其相关专业的一门非常重要的主干基础课程, 近 260 个总学时, 延续 3 个学期 (课堂教学时长和跨度是所有课程中最多、最长的, 没有之一), 这足以说明该课程的重要性. 通过该课程的学习, 学生不仅掌握后续专业课程所需要的理论基础知识、解决专业问题的理论工具, 更重要的是掌握解决问题的数学思想和方法, 形成一定的数学素养. 但是, 学习这门课程又是很难的, 一方面, 整个课程内容丰富, 理论体系庞大, 延续时间长, 内容之间的联系非常密切, 章节模块之间关联度非常高, 累积效应非常强, 这些都给课程的学习带来很大的困难; 另一方面, 数学课程自身的特点, 如理论性强、内容枯燥、高度的抽象性、应用的广泛性等, 更加使得学生在学习过程中感到困难. 但是, 这门课程的学习又是十分重要和必要的, 因此, 如何教好, 又如何让学生学好这门课, 是长期从事该课程教学的教师们面临的亟待解决的重大问题.

乘大学教育转型和教学改革的东风, 我们利用大学和理学院对基础教学的极度重视和大力支持, 在教学改革项目的资助下, 我们对该课程的教与学的过程进行了研究, 从教学内容、教学方法和手段、课堂的教学组织与实施、辅助教学过程到考核评价方式、考试形式与内容等进行了广泛的探索与实践, 这次出版的教材正是我们研究成果的集中体现.

总的说来, 本教材有如下特点:

(1) 本教材整体体现了基于本原性问题驱动的课程设计的教学理念.

本原性问题驱动理论就是在 HPM 的数学教育思想的基础上抽象形成的数学教育理论, 是指在数学教育中, 还原历史发展的环境, 阐述当时历史视角下人类认知发展规律、理论形成、发展的过程, 重点解决数学理论为何产生, 如何产生, 如何构建, 如何进一步应用形成的理论解决实际问题, 如何在整个理论的教育和学习过程中实现数学能力的培养？其关注的核心内容是：在数学教育中, 如何从数学理论、理论产生的历史背景问题、学生的认知规律的三个维度出发, 进行高质量的数学教育.

我们知道, 数学理论本身的产生与发展就是源于人类在认识自然和改造自然

的过程中, 对所遇到的实际问题进行的探索与求解以及由此对所形成的解决问题的思想、方法的高度抽象和高度的完善而形成的完美严谨的理论体系. 数学分析的核心内容——微积分理论, 正是为解决当时历史发展进程中亟待解决的工程技术和应用领域 (物理、天文、航海等) 中大量的实际问题而形成的, 可以说, 课程教学内容的本身就体现了问题驱动的特性. 而这一特性紧紧地与教学改革的能力培养的时代要求相吻合. 我们培养的学生, 将来走上工作岗位后要面对的还是一个个技术问题或实际问题的解决, 虽然这些问题与数学问题的形式不一样, 但是, 整个问题的求解过程, 从思路分析、方法的形成, 到技术路线的确立等环节中所隐藏的思想方法是一样的, 这些解决问题的思想方法正是能力的具体体现, 因此, 在传授知识的同时, 还原该理论的本原性问题的产生环境, 按当时的认知规律模拟问题解决的思想形成过程, 通过关注过程, 关注如何从现实问题实现当时条件下的问题求解, 让学生感受过程, 感受思想, 感受能力而不仅仅是理论本身, 以达到能力培养的目标.

基于本原性问题驱动的课程设计贯穿于整个教材的始终, 从引言开始, 以微积分的本原性问题解决为线索, 介绍微积分理论的主要内容、解决问题的思想方法, 以及贯穿于课程始终的数学思想, 后续每章内容的引入, 都是以历史发展过程中的本原性问题为出发点, 通过还原理论产生的背景, 解决的过程, 揭示数学理论中所隐藏的解决实际问题的数学思想和方法.

(2) 结构分析法和形式统一法的解决问题的数学思想贯穿于整个教材.

结构分析法和形式统一法是我们在教学过程中总结提炼出来的解决实际问题的一般性研究方法, 是科学研究理论在教学中的具体应用. 任何问题的解决都要经历两个阶段：解题思想的形成阶段与具体方法和路线的设计阶段. 第一个阶段确立问题解决的方向, 解决“用什么”的问题, 即利用哪个已知的理论解决问题, 由此确立解决问题的思路; 第二个阶段确立具体的方法, 解决“怎么用”的问题, 即设计具体的技术路线, 如何利用已知理论解决问题, 确立解决问题的具体方法.

数学理论的结论 (定理) 很多, 学生记住这些结论并不难, 难在如何用这些定理结论解决一个个具体的问题, 这是教学过程中的突出问题和难题, 针对于此, 我们经过深入的研究与实践, 提炼出了行之有效的结构分析法和形式统一法.

数学定理很多, 但是, 每个定理都有自己的结构特征, 有自己的作用对象, 要想掌握定理的使用, 必须掌握定理的结构特点, 即定理处理的题型结构是什么, 只有如此, 当我们面对解决的问题时, 先对问题的结构作分析, 找到结构特点, 与已知的定理的处理对象的结构特点作类比, 由此确定使用什么定理和结论. 而在具体的求解过程中, 求解的核心思想是建立已知和未知的联系, 我们类比在思路确立中确定的已知定理, 分析应用过程中要解决的重点和难点, 先从形式上入手, 将待求解的问题从形式上转化为已经确立使用的已知定理或结论的形式, 或建立已

知和未知的联系, 使待求解的未知和要使用解决问题的已知在形式上进行统一, 进一步形成解决问题的具体方法. 这就是结构分析法和形式统一法的核心内容. 可以将这种方法总结为 24 字方针: 分析结构, 挖掘特点, 类比已知, 确立思路, 形式统一, 设计方法.

在教材中, 对大部分题目都给出了分析过程, 在分析过程中, 利用结构分析法和形式统一法给出解题的思路和具体的方法设计. 我们不厌其烦地从始至终使用这种方式, 不怕重复, 目的就是对学生进行数学思维训练的一遍遍的冲击, 养成良好的数学解决问题的方式和习惯, 培养坚实的数学素养.

(3) 在内容体系上有所变化.

在引入实数系基本定理时, 大多教材都是以确界存在定理为公理, 建立实数系的其他基本定理. 确界存在定理较抽象, 此结论的成立并不明显, 以此为公理有些突兀. 我们采取戴德金分割定理为公理, 建立实数系基本定理. 戴德金分割定理就是对实数轴的一个具体的分割, 形式简单直观, 很容易理解.

为了分散极限定义的难度, 我们在介绍集合的有界性时, 就引入确界的定义, 从而, 可以使学生更早接触极限定义中非常重要又非常难以理解和掌握的量——“ε”, 这是极限定义的灵魂, 这样, 学生对这个量的认识过程相对较长, 把极限的难度进行了分解, 也使学生对极限内涵的理解更加深刻.

在教学内容的其他部分上也进行了内容丰富, 其中, 个别地方还加入了笔者自己的研究心得和体会, 如在介绍一致连续时, 增加了对一致连续函数特征的更深入的刻画; 在级数理论中, 给出了一个新的结果, 使得对复杂结构的级数的敛散性的判断进行简单化; 对贯穿教材始终的柯西收敛准则进行的强化和深入的训练, 这是体现极限思想的重要成果之一, 学生必须掌握. 这样的变化在教材中还有很多.

(4) 在教材的编排形式上有所变化, 将数学思维和数学素养的培养、解决问题的实际能力的培养融入教材, 体现学案式的教材设计理念.

现有的通用教材强调理论体系的较多, 以教为主的多, 以理论知识的传授为主的多, 我们一直想变一变, 转变理念, 将理论知识的传授与能力的培养、数学思维和素养的熏陶相结合, 突出以学为主, 为学生提供一套“学案”, 而不仅仅是教师所用的教材或教案, 我们希望这套教材也可以称之为这样的学案. 这样的设计思想和理念体现在我们对教学内容的编排设计和对整个教材的设计上.

在内容的编排上, 我们突出了分析和总结过程, 体现对能力培养的设计思想; 这样的编排是希望学生从模仿开始, 直到可以独立地进行对教学内容的分析和总结, 对数学思想的归纳和提炼, 对解题方法的分析和理解, 从理解给出的问题开始, 到独立地去发现问题、分析问题和解决问题, 这是一个循序渐进的过程, 我们的教材设计体现这个过程.

(5) 教材中还引入了一些新词汇.

这些词汇有些源于现代分析学, 如挖洞法、扰动法、降维法等, 有些是借用, 如坏点、聚点、可控性、定性分析、定量分析等; 也引入了一些新的表示方法, 如表示双侧曲面侧的有侧 (向) 曲面、有侧投影, 表示双侧曲面的表示方法 $\mathbf{\Sigma}$, 第二类曲面积分的表示方法如 $\iint_{\mathbf{\Sigma}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 区分平面区域上的二重积分等.

教材还有其他的一些特点, 如在课后习题的设计上增加了难度, 引入了一些考研题目, 作者在教学过程中自己设计了一些题目, 增加了结构分析的题型, 学生可以通过学习逐渐去领会.

这套教材是我们辛苦工作的成果, 虽然几年前就已经成型, 一遍遍地试用, 总想让它十分完美, 当然, 这是不可能的, 因为每次使用后总感觉还有新的感悟, 需要增加新的东西, 需要在表达的准确性、逻辑性上做进一步的精雕细琢, 这就是所谓的精益求精吧; 这个过程是无止境的, 任何事物总是在发展, 在前进, 没有终结篇, 我们只能给出阶段性的成果; 我们也希望通过阶段性成果的公开出版, 接受同行、学生的检验和批判, 以改进我们的工作. 因此, 不当之处敬请批评指正, 不胜感激.

作 者

2017 年 11 月

2.教材：高等数学（全二册）ISBN ：9787030733238

大学数学教学丛书

高等数学（上册）

王耀革　郭从洲　崔国忠　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书依据理工类本科高等数学课程教学基本要求，并结合教学实践经验编写而成. 融入了课程思政元素，且将“结构分析-形式统一法”贯穿于教材，相比于同类教材，本书增加了部分内容，调整了一些内容的讲述顺序，内容更丰富，系统性更强.

本书在定理的证明和例题的求解之前增加了结构分析环节，展现了思路形成和解题方法设计的过程，突出了数学理性分析的特点；在重要的定义和知识点之后，增加了信息挖掘和抽象总结，优化学生的认知结构；增加了例题和习题的难度，并增加了结构分析的习题题型，突出分析和解决问题的培养和训练.

本书分上、下两册. 上册共 4 章，主要内容有：高等数学基础知识(数列和函数的极限、极限的运算、函数的连续性)、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程. 下册共 5 章，主要内容有：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元数量值函数积分学、向量值函数积分学、无穷级数.

本书可作为高等院校理工类非数学类专业高等数学课程教材，也可作为青年教师教学使用的参考书，同时也是一套学生自学的“学案”.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（全二册）/王耀革，郭从洲，崔国忠主编.—北京：科学出版社，2022.10

ISBN 978-7-03-073323-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②郭… ③崔… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 180827 号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤／责任校对：杨聪敏
责任印制：张 伟／封面设计：蓝正设计

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2022 年 10 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2022 年 10 月第一次印刷 印张：49
字数：988 000

定价：169.00 元（上下册）
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

2020 年教育部印发《高等学校课程思政建设指导纲要》(以下简称《纲要》),《纲要》指出理学、工学类专业课程“要在课程教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来, 提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力”.《纲要》指明了理学类课程如何进行课程思政以及课程思政的目标. 如果把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来、掌握解决问题的数学思想、培养学生的数学素养和专业素养为目的的教学内容体系设计理解为是一种课程思政隐性教育的话, 那么在具体的教学实施过程中, 通过融入课程思政元素, 以提升学生学习兴趣、活跃课堂气氛为目的的教学设计就是属于课程思政显性教育.

高等数学理论体系庞大, 课程内容丰富, 授课学时长, 章节模块之间关联度非常高, 累积效应非常强; 再加上数学课程自身的特点: 理论性强、高度抽象、逻辑严谨、应用广泛, 为课程的教与学带来很大困难. 因此, 如何教好又如何让学生学好这门课, 是我们长期从事该课程教学的教师面临的亟待解决的重大问题. 我们从事高等数学的教学已有二十余年, 一直致力于课程教学研究, 特别是在教育和教学改革的时代背景下, 我们对高等数学的教与学进行了一系列的改革实践, 从教学理念、教学内容、教学方法和数学手段、课程考核评价等进行了深入的探索与实践, 取得了丰富的研究成果, 提出了独创的结构分析教学方法, 这套教材正是基于结构分析方法而编写的特色鲜明的教材.

本教材有如下特点:

1. 融入课程思政元素的课程思政显性教育.

高等数学的很多概念都包含着丰富哲学原理和人生道理, 这些典型的案例在塑造学生人生观、价值观和世界观上有着很好的引导作用. 中华文明中蕴含的数学内涵既有助于提升我们的文化自信, 还可以加深学生对数学概念的理解. 但是

这些内容不可能在课堂教学中过多地占用讲授时间, 只能在恰当的时机 “点到为止”, 这种时机的把握与老师的教学经验密切相关. 本书根据我们长期的教学实践, 适当引入中华文明中蕴含的数学内涵、哲学原理等内容, 作为一种尝试, 能否体现好课程思政效果, 见仁见智, 此处算抛砖引玉, 如能有些许作用, 作者团队便觉欣慰.

2. “结构分析–形式统一法” 的课程思政隐性教育.

“结构分析–形式统一法” 是我们在教学过程中总结提炼出来的解决实际问题的一般性研究方法, 是科学研究理论在教学中的具体应用. 任何问题的解决都要经历两个阶段: 第一阶段, 利用 “结构分析法”, 分析待解问题的结构, 确立题目特点, 类比已知知识, 形成 “解决问题的思路”; 第二阶段, 利用 “形式统一法”, 将题目的条件或结论, 转化为相关已知知识的形式, 寻找解决问题的方法和技巧, 完成解决问题的具体过程. 思路确立阶段主要解决 “用什么” 的问题, 明确解决问题的方向, 即确立利用哪个已知的定理或理论解决问题, 由此确立解决问题的思路; 技术路线设计阶段主要解决 “怎么用” 的问题, 即利用已经确立的已知理论设计具体的解题方法, 完成问题的求解.

所有的工程技术问题、理论研究问题, 甚至生活中的问题的解决都需要经历上述两个阶段, 只是由于大多数问题的求解相对简单, 可以直接进行求解, 忽略了思路确立阶段, 或者是基于经验主义或认知没有达到相应的高度, 忽视了思路确立阶段. 以前的不少高等数学教材都是只呈现 “怎么用” 的解题阶段, 而没有体现出 “为什么这样做” 的思路确立阶段, 这对大学阶段的数学课程, 特别是高等数学课程而言是非常遗憾的事情.

高等数学的定义 (定理或结论) 很多, 学生记住这些结论并不难, 看懂教材给出的解题过程也不难, 但是, 真正透彻理解解题过程 (为何要用此定理解题? 每一步中蕴藏着什么?) 很难, 将其推而广之, 解决更广泛的问题更难, 而让学生形成正确地分析问题、准确地选择知识、恰当地运用结论、合理地解决问题的数学思维和能力, 更是难上加难. 我们提出的 “结构分析–形式统一法” 就是针对教与学双方在教与学过程中所面对的这一难题而提出的破解方法.

我们通过挖掘每个定义 (定理或结论) 的结构特点, 明确定义 (定理或结论) 能够作用的对象. 当我们面对需要解决的问题时, 先对问题的结构作分析, 找到结构特点, 与已知的定义 (定理或结论) 处理对象的结构特点作类比, 由此确定使用什么定义 (定理或结论); 而在具体的求解过程中, 求解的核心思想是建立已知和

未知的联系, 我们类比思路确立中所确定的已知定义 (定理或结论), 分析应用过程中要解决的重点和难点, 先从形式上入手, 将待求解的问题从形式上转化为已经确立使用的已知定理或结论的形式, 或建立已知和未知的联系, 使 "待求解的未知" 和要使用 "解决问题的已知" 在形式上进行统一, 进一步形成解决问题的具体方法. 这就是 "结构分析–形式统一法" 的核心内容. 可以将这种方法总结为 24 字: 分析结构, 挖掘特点, 类比已知, 确立思路, 形式统一, 设计方法.

在本教材中, 对大部分定义、定理和题目都给出了分析过程, 在分析过程中利用 "结构分析–形式统一法" 给出解题的思路和具体的方法设计. 教材从始至终使用这种方式对学生进行数学思维训练, 优化学生的认知结构, 使学生养成良好的解决数学问题的方式和习惯, 培养坚实的数学素养.

3. 教材增加了部分内容. 在基础部分增加了实数系及其性质, 以便较为深入地介绍极限理论; 增加了无穷小阶的概念, 为无穷小的比较做铺垫; 积分部分增加了特殊结构的积分的计算; 微分方程部分增加了微分方程的数值解, 强化高等数学的应用思想.

4. 适当融入了作者教学团队教学中的研究心得. 如在应用数列极限定义证明数列极限时, 给出了放大法; 在介绍单调有界数列必有极限准则的应用时, 给出了预判法; 在介绍五类基本初等函数的求导公式时, 从结构视角分析求导对函数结构的影响, 为后续分部积分方法提供思考方向的理论支撑.

5. 局部章节内容进行了调整. 如将数列极限的性质和函数极限的性质统一讲解, 避免知识重复; 在一元函数积分学中, 先讲定积分的定义, 重视定积分解决问题的思想, 将不定积分和积分方法作为定积分的计算工具随后引入; 在多元函数积分学中, 把重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分归结为求非均匀变化的不同几何形体的质量, 统一为数量值函数的积分, 把对坐标的曲线 (曲面) 积分统一为有向曲线 (曲面) 上的向量值函数的积分, 以弥补学生对向量值函数认知上的不足, 更利于后续大学物理课程的理解和学习.

6. "学案式" 的编排理念. 将数学思维的培养 (即如何想) 和解决问题的实际能力的培养 (即如何做) 融入教材, 将理论知识的传授与能力的培养、数学思维和素养的熏陶相结合, 突出以学为主, 为学生提供一套 "学案", 而不仅仅是教师所用的教材或教案.

信息工程大学基础部数学教研室在多年教学改革的基础上, 组织编写了这套 "大学数学教学丛书, 本书就是其中的一本. 本书是在崔国忠主编的《数学分析》

基础上编写而成, 第 1~5 章和第 9 章由王耀革撰稿, 第 6~8 章由郭从洲撰稿. 除此之外, 张冬燕、孙铭娟、刘倩参与课件制作工作, 李可、文生兰、李瑞瑞提供课后习题答案. 全书由王耀革、郭从洲统稿、定稿. 尽管我们对这套教材倾注了极大的心血, 但书中还存在着不足. 经过两年使用, 每次使用后我们都有新的感悟, 都要增加新的内容, 总想在表达的准确性、逻辑性上做进一步的精雕细琢, 这个过程是无止境的. 任何事物总是在发展、在前进, 没有终结篇, 我们只能给出阶段性的成果, 也希望通过阶段性成果的出版, 接受同行、学生的检验、批评和指正, 以改进我们的工作.

本书的编写参阅了大连理工大学应用数学系组编的《工科数学分析》, 同济大学数学系编的《高等数学》, 浙江大学吴迪光、张彬编著的《微积分学》, 国防科学技术大学李建平、朱健民主编的《高等数学》, 以及其他兄弟院校的资料, 由于篇幅有限, 不再一一列出, 这些优秀的教材和丰富的资料给我们的编写带来诸多的启示, 提供了大量可引用的素材, 在此特别对参考文献和资料的作者表示衷心的感谢!

这套教材的编写得到了信息工程大学基础部领导的大力支持, 学校教务处为教学试点提供有利条件, 教研室的其他同事也给予了大力支持和鼓励, 正是这些支持和鼓励, 使得高等数学教材建设得以顺利进行. 科学出版社的张中兴编辑对本书的选题和成书给予大量的指导, 在此表示衷心的感谢!

作　者
于信息工程大学
2021 年 11 月

目　　录

目　　录

3.教材：数学分析（一二三）（第一版）ISBN ：9787030576002

首套基于结构分析的教材，以全新的结构分析视角带您进入古典分析的世界，用独特的统一方法揭示经典理论中隐含的丰富的数学思想和方法.

数学分析(一)

主　编　崔国忠
副主编　石金娥　郭从洲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共三册，按三个学期设置教学，介绍了数学分析的基本内容.

第一册内容主要包括数列的极限、函数的极限、函数连续性、函数的导数与微分、函数的微分中值定理、Taylor公式和L'Hospital法则. 第二册内容主要包括不定积分、定积分、广义积分、数项级数、函数项级数、幂级数和Fourier级数. 第三册内容主要包括多元函数的极限和连续、多元函数的微分学、含参量积分、多元函数的积分学.

本书在内容上，涵盖了本课程的所有教学内容，个别地方有所加强；在编排体系上，在定理和证明、例题和求解之间增加了结构分析环节，展现了思路形成和方法设计的过程，突出了教学中理性分析的特征；在题目设计上，增加了例题和课后习题的难度，增加了结构分析的题型，突出分析和解决问题的培养和训练.

本书可供高等院校数学及其相关专业选用教材，也可作为优秀学生的自学教材，同时也是一套青年教师教学使用的非常有益的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：全 3 册/崔国忠主编. —北京：科学出版社，2018.7
ISBN 978-7-03-057600-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔…Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 113102 号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018年7月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018年7月第一次印刷 印张：49 1/4
字数：998 000
定价：128.00元(全3册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　　言

——基于结构分析的教材与课程设计

“数学分析”是数学及其相关专业的一门非常重要的主干基础课程，近260个总学时，延续3个学期(课堂教学时长和跨度是所有课程中最多、最长的，没有之一)，这足以说明该课程的重要性. 通过该课程的学习，学生不仅掌握后续专业课程所需要的理论基础知识、解决专业问题的理论工具，更重要的是掌握解决问题的数学思想和方法，培养学生的数学素养. 但是，学习这门课程又是很难的，一方面，整个课程内容丰富，理论体系庞大，延续时间长，内容之间的联系非常密切，章节模块之间关联度非常高，累积效应非常强，这些都给课程的学习带来很大的困难；另一方面，数学课程自身的特点，如理论性强、内容枯燥、高度的抽象性、应用的广泛性等，更加使得学生在学习过程中感到困难. 但是，这门课程的学习又是十分重要和必要的，因此，如何教好，又如何让学生学好这门课，是长期从事该课程教学的教员们面临的亟待解决的重大问题.

乘大学教育转型和教学改革的东风，我们利用大学和理学院对基础教学的极度重视和大力支持，在教学改革项目的资助下，我们对该课程的教与学的过程进行了研究，从教学内容、教学方法和手段、课堂的教学组织与实施、辅助教学过程到考核评价方式、考试形式与内容等进行了广泛的探索与实践，这次出版的教材正是我们研究成果的集中体现.

总的说来，本教材有如下特点：

(1) 本教材整体体现了基于本原性问题驱动的课程设计的教学理念.

本原性问题驱动理论就是基于HPM的数学教育思想，抽象形成的数学教育理论，指在数学教育中，还原历史发展的环境，阐述当时历史视角下人类认知发展规律、理论形成、发展的过程，重点解决数学理论为何产生，如何产生，如何构建，如何进一步应用形成的理论解决实际问题，如何在整个理论的教育和学习过程中实现数学能力的培养？其关注的核心内容是：在数学教育中，如何从数学理论、理论产生的历史背景问题、学生的认知规律的三个维度出发，进行高质量的数学教育.

我们知道，数学理论本身的产生与发展就是源于人类在认识自然和改造自然的过程中，对所遇到的实际问题进行的探索与求解以及由此对所形成的解决问题

的思想、方法的高度抽象和高度的完善而形成的完美严谨的理论体系. 数学分析的核心内容——微积分理论, 正是为解决当时历史发展进程中亟待解决的工程技术和应用领域(物理、天文、航海等）中大量的实际问题而形成的, 可以说, 课程教学内容的本身就体现了问题驱动的特性. 而这一特性紧紧与教学改革的能力培养的时代要求相吻合. 我们培养的学生, 将来走上工作岗位后要面对的还是一个个技术问题或实际问题的解决, 虽然这些问题与数学问题的形式不一样, 但是, 整个问题的求解过程, 从思路分析、方法的形成, 到技术路线的确立等环节中所隐藏的思想方法是一样的, 这些解决问题的思想方法正是能力的具体体现, 因此, 在传授知识的同时, 还原该理论的本原性问题的产生环境, 按当时的认知规律模拟问题解决的思想形成过程, 通过关注过程, 关注如何从现实问题实现当时条件下的问题求解, 让学生感受过程, 感受思想, 感受能力而不仅仅是理论本身, 达到能力培养的目标.

基于本原性问题驱动的课程设计贯穿于整个教材的始终, 从课程的绪论——正是以微积分的本原性问题解决为线索, 开始介绍微积分理论的主要内容、解决问题的思想方法, 以及贯穿于课程始终的数学思想, 后续每章内容的引入, 都是以历史发展过程中的本原性问题为出发点, 通过还原理论产生的背景, 解决的过程, 揭示数学理论中所隐藏的解决实际问题的数学思想和方法.

(2) 结构分析法和形式统一法的解决问题的数学思想贯穿于整个教材.

结构分析法和形式统一法是我们在教学过程中总结提炼出来的解决实际问题的一般性研究方法, 是科学研究理论在教学中的具体应用. 任何问题的解决都要经历两个阶段: 解题思想的形成阶段与具体方法和路线的设计阶段. 第一个阶段确立问题解决的方向, 解决“用什么”的问题, 即利用哪个已知的理论解决问题, 由此确立解决问题的思路; 第二个阶段确立具体的方法, 解决“怎么用”的问题, 即设计具体的技术路线, 如何利用已知理论解决问题, 确立解决问题的具体方法.

数学理论的结论(定理)很多, 学生记住这些结论并不难, 难在如何用这些定理结论解决一个个具体的问题, 这是教学过程中的突出问题和难题, 针对于此, 我们经过深入的研究与实践, 提炼出了行之有效的结构分析法和形式统一法.

数学定理很多, 但是, 每个定理都有自己的结构特征, 有自己的作用对象, 要想掌握定理的使用, 必须掌握定理的结构特点, 即定理处理的题型结构是什么, 只有如此, 当我们面对解决的问题时, 先对问题的结构作分析, 找到结构特点, 与已知的定理的处理对象的结构特点作类比, 由此确定使用什么定理和结论. 而在具体的求解过程中, 求解的核心思想是建立已知和未知的联系, 我们类比在思路确立中确定的已知定理, 分析应用过程中要解决的重点和难点, 先从形式上入手, 将待求解的问题从形式上转化为已经确立使用的已知定理或结论的形式, 或建立

已知和未知的联系，使待求解的未知和要使用解决问题的已知在形式上进行统一，进一步形成解决问题的具体方法. 这就是结构分析法和形式统一法的核心内容. 可以将这种方法总结为24字方针：分析结构，挖掘特点，类比已知，确立思路，形式统一，设计方法.

在教材中，对大部分题目都给出了分析过程，在分析过程中，利用结构分析法和形式统一法给出解题的思路和具体的方法设计. 我们不厌其烦地从始至终使用这种方式，不怕重复，目的就是对学生进行数学思维训练的一遍遍的冲击，养成良好的数学解决问题的方式和习惯，培养坚实的数学素养.

(3) 在内容体系上有所变化.

在引入实数系基本定理时，大多教材都是以确界存在定理为公理，建立实数系的其他基本定理. 确界存在定理较抽象，此结论的成立并不明显，以此为公理有些突兀。我们采取Dedekind分割定理为公理，建立实数系基本定理. Dedekind分割定理就是对实数轴的一个具体的分割，形式简单直观，很容易理解。

为了分散极限定义的难度，我们在介绍集合的有界性时，就引入确界的定义，从而，可以使学生更早接触极限定义中非常重要又非常难以理解和掌握的量——“ε”，这是极限定义的灵魂，这样，学生对这个量的认识过程相对较长，把极限的难度进行了分解，也使学生对极限内涵的理解更加深刻.

在教学内容的其他部分上也进行了内容丰富，其中，个别地方还加入了笔者自己的研究心得和体会，如在介绍一致连续时，增加了对一致连续函数特征的更深入的刻画；在级数理论中，给出了一个新的结果，使得对复杂结构的级数的敛散性的判断进行简单化；对贯穿教材始终的Cauchy收敛准则进行的强化和深入的训练，这是体现极限思想的重要成果之一，学生必须掌握；这样的变化在教材中还有很多.

(4) 在教材的编排形式上有所变化，将数学思维和数学素养的培养、解决问题的实际能力的培养融入教材，体现学案式的教材设计理念.

现有的通用教材强调理论体系的较多，以教为主的多，以理论知识的传授为主的多，我们一直想变一变，转变理念，将理论知识的传授与能力的培养、数学思维和素养的熏陶相结合，突出以学为主，为学生提供一套“学案”，而不仅仅是教师所用的教材或教案，我们希望这套教材也可以称之为这样的学案. 这样的设计思想和理念体现在我们对教学内容的编排设计和对整个教材的设计上.

在内容的编排上，我们突出了分析和总结过程，体现对能力培养的设计思想；这样的编排是希望学生从模仿开始，直到可以独立地进行对教学内容的分析和总结，对数学思想的归纳和提炼，对解题方法的分析和理解，从理解给出的问题开始，到独立地去发现问题、分析问题和解决问题，这是一个循序渐进的过程，我们

的教材设计体现这个过程.

(5) 教材中还引入了一些新词汇.

这些词汇有些源于现代分析学, 如挖洞法、扰动法、降维法等, 有些是借用, 如坏点、聚点、可控性、定性分析、定量分析等; 也引入了一些新的表示方法, 如表示双侧曲面侧的有侧(向)曲面、有侧投影, 表示双侧曲面的表示方法 $\vec{\Sigma}$, 第二类曲面积分的表示方法如 $\iint_{\vec{\Sigma}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 区分平面区域上的二重积分等.

教材还有其他的一些特点, 如在课后习题的设计上增加了难度, 引入了一些考研题目, 作者在教学过程中自己设计了一些题目, 增加了结构分析的题型, 学生可以通过学习逐渐去领会.

这套教材是我们辛苦工作的成果, 虽然几年前就已经成型, 一遍遍地试用, 总想让它十分完美, 当然, 这是不可能的, 因为每次使用后总感觉还有新的感悟, 需要增加新的东西, 需要在表达的准确性、逻辑性上做进一步的精雕细琢, 这就是所谓的精益求精吧; 这个过程是无止境的, 任何事物总是在发展, 在前进, 没有终结篇, 我们只能给出阶段性的成果; 我们也希望通过阶段性成果的公开出版, 接受同行、学生的检验和批判, 以改进我们的工作. 因此, 不当之处敬请批评指正, 不胜感激.

作　者

2017年11月

目　　录

目　　录

目　录